線形代数I・中間試験（6 月 11 日）

ふりがな	
氏名	

学生番号	

氏名		学生番号	

問題 1 (3 点 ×2). 次の正方行列 A について、A^n を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

(1) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^n = \begin{cases} A & (n \text{ は奇数}) \\ E & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$

氏名		学生番号	

問題 2 (4 点 ×2). 次の各問いに答えよ。

(1) 平面の原点 O を中心とし $\pi/3$ 回転させる線形写像 $F_{\pi/3}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と y 軸に関して対称な点を対応させる線形写像 $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、次のように表す。

$$F_{\pi/3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

成分 a_{ij} と b_{ij} を求めよ。

(2) 合成写像 $F_{\pi/3} \circ G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と $G \circ F_{\pi/3}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、次のように表す。

$$(F_{\pi/3} \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (G \circ F_{\pi/3})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

成分 c_{ij} と d_{ij} を求めよ。

(1) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

氏名		学生番号	

問題 3 (4 点). 次のベクトル $\mathbf{a}$ がベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ の 1 次結合で表されるとき、c を求めよ。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

必ず、$\mathbf{a} = (3/5)\mathbf{b}_1 + (1/5)\mathbf{b}_2$ なので、$c = 8/5$.

氏名		学生番号	

問題 4 (3 点 ×3). 次の 1 次方程式について、各問いを答えよ。

$$\begin{cases} \quad\quad\ 2y - 3z = 5 \\ 2x - 3y \quad\quad\ = 1 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

(1) 拡大行列 A を求めよ。

(2) 拡大行列 A の簡約化 B を求めよ。ただし解答にはどのような基本変形を行ったかを明記すること。

(3) 元の 1 次方程式の解を求めよ。

(1) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$

(2) $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

(3) $\begin{cases} x = 11 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases}$

氏名		学生番号	

問題 5 (4 点 $\times 2$). 次の行列 A の簡約化 B と階数を求めよ。

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(1)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{rank}(A) = 3.$$

$$(2)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{rank}(A) = 2.$$

氏名		学生番号	

問題 6 (5 点). 任意の実数 a に対して、次の行列 A の階数を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & a & a \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(A) = \begin{cases} 2 & (a = 0\text{、}a = 1 \text{ 及び } a = 4) \\ 3 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$