

## 練習問題その 1 (解答)

問題 1. (1)  $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c\}$ ,  $f(1) = f(2) = a$ ,  $f(3) = b$ ,  $f(4) = c$  は全射である。

(2)  $g: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c\}$ ,  $g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = a$  は全射でない写像である。

(3)  $h: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $h(a) = 1$ ,  $h(b) = 2$ ,  $h(c) = 4$  は単射である。

(4)  $i: B \rightarrow A$ ,  $i(a) = i(b) = 2$ ,  $i(c) = 4$  は単射でない写像である。

問題 2. 写像  $f: A \rightarrow B$  と  $g: B \rightarrow C$  において、合成写像  $g \circ f: A \rightarrow C$  は全単射であることは仮定された。

(1) 必ずしも  $f: A \rightarrow B$  は全射ではない。例として、 $f: \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$  と  $g: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$  それぞれ  $f(1) = 1$  と  $g: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$ ,  $g(1) = g(2) = 1$  で定義すると  $g \circ f: \{1\} \rightarrow \{1\}$  は全単射であり  $f: \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$  全射ではない。

必ず  $g: B \rightarrow C$  は全射である。ただし、 $(g \circ f)(A) = C$  なので、

$$C = (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subset g(B) \subset C$$

であることが分かる。よって、 $g(B) = C$  であることが成り立つ。

(2) 必ず  $f: A \rightarrow B$  は単射。合成写像  $g \circ f: A \rightarrow C$  は単射なので、 $a_1 \neq a_2$  のとき

$$g(f(a_1)) = (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2) = g(f(a_2))$$

であることが分かる。よって、 $f(a_1) \neq f(a_2)$  であることが分かる。すなわち、 $f: A \rightarrow B$  は単射である。

最後に、以上の例をもう 1 回考えると、必ずしも  $g: B \rightarrow C$  は単射ではないことが分かる。

問題 3. (1)  $f: A \rightarrow B$  は全射のとき、

$$f(f^{-1}(V)) = \{f(a) \mid a \in f^{-1}(V)\} = \{f(a) \mid f(a) \in V\} = V$$

であることが分かる。

(2)  $f: A \rightarrow B$  は単射のとき、

$$f^{-1}(f(U)) = \{a \in A \mid f(a) \in f(U)\} = U$$

であることが分かる。

問題 4. 次のように定義された写像  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1)$  は全単射である。

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-(i+1)} & (x = 2^{-i}, \text{ ある } i \geq 0) \\ x & (\text{それ以外}) \end{cases}$$