

練習問題その1(解答)

問題 1. (1) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c\}$, $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$, $f(4) = c$ は全射である。

(2) $g: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c\}$, $g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = a$ は全射でない写像である。

(3) $h: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, $h(a) = 1$, $h(b) = 2$, $h(c) = 4$ は単射である。

(4) $i: B \rightarrow A$, $i(a) = i(b) = 2$, $i(c) = 4$ は単射でない写像である。

問題 2. 写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ において、合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ は全単射であることは仮定された。

(1) 必ずしも $f: A \rightarrow B$ は全射ではない。例として、 $f: \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$ と $g: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$ それぞれ $f(1) = 1$ と $g: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$, $g(1) = g(2) = 1$ で定義すると $g \circ f: \{1\} \rightarrow \{1\}$ は全単射であり $f: \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$ 全射ではない。

必ず $g: B \rightarrow C$ は全射である。ただし、 $(g \circ f)(A) = C$ なので、

$$C = (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subset g(B) \subset C$$

であることが分かる。よって、 $g(B) = C$ であることが成り立つ。

(2) 必ず $f: A \rightarrow B$ は単射。合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ は単射なので、 $a_1 \neq a_2$ のとき

$$g(f(a_1)) = (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2) = g(f(a_2))$$

であることが分かる。よって、 $f(a_1) \neq f(a_2)$ であることが分かる。すなわち、 $f: A \rightarrow B$ は単射である。

最後に、以上の例をもう1回考えると、必ずしも $g: B \rightarrow C$ は単射ではないことが分かる。

問題 3. (1) $f: A \rightarrow B$ は全射のとき、

$$f(f^{-1}(V)) = \{f(a) \mid a \in f^{-1}(V)\} = \{f(a) \mid f(a) \in V\} = V$$

であることが分かる。

(2) $f: A \rightarrow B$ は単射のとき、

$$f^{-1}(f(U)) = \{a \in A \mid f(a) \in f(U)\} = U$$

であることが分かる。

問題 4. 次のように定義された写像 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ は全单射である。

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-(i+1)} & (x = 2^{-i}、ある i \geq 0) \\ x & (それ以外) \end{cases}$$