練習問題その１０ (解答)

問題 1. (1) 第 1 行で展開すると、

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +4 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 15 = 60$$

が得る。

(2) 第 1 行で展開し、第 1 列で展開し、第 1 行で展開し、第 1 行で展開すると、

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-8) \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 13 & -2 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-8) \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot (-8) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 = 192$$

が得る。

(3) 同様に、

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -19$$

となる。

問題 2. まず、$n = 1$ のとき、$\det(A) = a_{11}$ は自明なので、$n - 1$ のときは正しいと仮定し、n のときを示せばよい。第 1 列で展開すると、$\det(A) = a_{11} \det(A_{11})$ であることが分かる。確かに、任意の $i > 1$ に対して、$a_{i1} = 0$ である。ここで、A_{11} は $n - 1$ 次の上三角行列なので、

帰納法の仮定より、$\det(A_{11}) = a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$ であることが分かる。よって、

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

が成り立つ。

<u>問題</u> 3. $P_i(s)$ は、単位行列 E_n の第 i 行を s 倍とした行列である。特に、$P_i(s)$ は上三角行列なので、問題 2 より、$\det(P_i(s)) = s$ が得る。

$T_{i,j}$ は、単位行列 E_n の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である。$T_{i,j} = T_{j,i}$ なので、$i < j$ であることを仮定すればよい。まず、第 i 行で展開し、それから、第 $j-1$ 行で展開すると、

$$\det(T_{i,j}) = (-1)^{i+j}\det((T_{i,j})_{ij}) = (-1)^{i+j}(-1)^{j-1+i}\det(E_{n-2}) = -1$$

が得る。

$E_{i,j}(s)$ は、単位行列 E_n の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えた行列である。$i < j$ のとき、$E_{i,j}(s)$ は上三角行列なので、問題 2 より、$\det(E_{i,j}(s)) = 1$ が得る。$i > j$ のとき、${}^tE_{i,j}(s)$ は上三角行列なので、系 8 と問題 2 より、$\det(E_{i,j}(s) = \det({}^tE_{i,j}(s)) = 1$ が得る。

<u>問題</u> 4. まず、$m = 1$ のとき、第 1 列で展開すると、

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = a_{11}\det(D) = \det(A)\det(D)$$

が成り立つ。よって、$m-1$ のときは正しいとを仮定し、m のときを示せばよい。B の第 i 行を除いた行列を B_i とし、第 1 列で展開すると、

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i1}\det\begin{pmatrix} A_{i1} & B_i \\ O & D \end{pmatrix}$$

が得る。ここで、帰納法の仮定より、

$$\det\begin{pmatrix} A_{i1} & B_i \\ O & D \end{pmatrix} = \det(A_{i1})\det(D)$$

であることが分かる。よって、

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1})\det(D) = \det(A)\det(D)$$

が得る。