練習問題その１１ (解答)

<u>問題</u> 1. 行列 $E_n + E_n = 2E_n$ は対角行列なので、命題８より、

$$\det(E_n + E_n) = \det(2E_n) = 2^n$$

が得る。同情に、$2E_n$ は、E_n の各列を２倍とした行列なので、定理 １の性質（２）より、

$$\det(E_n + E_n) = \det(2E_n) \overset{(2)}{=} 2^n \det(E_n) = 2^n$$

が得る。

<u>問題</u> 2. $T_{3,4}T_{1,2}P = E_4$ から $(-1)(-1)\det(P) = \det(E_4)$ が得るので、$\det(P) = 1$ となる。

$T_{1,2}T_{2,3}T_{3,4}Q = E_4$ から $(-1)(-1)(-1)\det(Q) = \det(E_4)$ が得るので、$\det(Q) = -1$ となる。

<u>問題</u> 4. 行列 A は可逆のとき、$AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$ である。よって、

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E_n) = 1$$

であることが分かる。よって、$\det(A)$ はゼロでない、

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

であることが得る。

<u>問題</u> 5. 行列の等式 $A^m = E_n$ から、実数の等式

$$\det(A)^m = \det(A^m) = \det(E_n) = 1$$

が成り立つ。よって、$|\det(A)| = 1$ であることが分かる。

(行列 A の成分は複素数のとき、どうになるのでしょうか？)

<u>問題</u> 3. 等式 $\det({}^tA) = \det(A)$ より、定理 1 での " 列 " を " 行 " とした定理も成り立つ。その定理と命題 8 を、次のように使う。

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{pmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{pmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{pmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \\
&\overset{(3)}{=} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{命題}8}{=} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= 2\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$