練習問題その１２ (解答)

問題 1. 第 1 行と第 3 行を入れ替えると、下三角行列となるので、次の等式が分かる。

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{31} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} = -a_{31}a_{22}a_{13}$$

問題 2. 第 2 行と第 5 行を入れ替えると、次の等式が成り立つ。

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

それから、第 1 列と第 3 列を入れ替えると、次の等式が成り立つ

$$-\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ここで、右辺の行列式は、三角行列の行列式なので、値は対角の各成分の積

$$6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 = 60$$

であることが分かる。よって、元の行列式の値も 60 であることが分かる。

問題 3. (7) まず、第 2 行に第 1 行掛ける −1 を加え、第 3 行に第 1 行掛ける −1 を加えると、

$$\det\begin{pmatrix} 99 & 100 & 101 \\ 100 & 99 & 100 \\ 101 & 101 & 99 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 99 & 100 & 101 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

が得る。それから、第 1 列に第 3 列を加えると、

$$\det\begin{pmatrix} 99 & 100 & 101 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 200 & 100 & 101 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

が得る。最後に、第3行に第2行を加えると、

$$\det\begin{pmatrix}200 & 100 & 101\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}200 & 100 & 101\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} = 200\cdot(-1)\cdot(-3) = 600$$

が得る。

(１０) まず、$n = 2m$ のとき、第1行と第 $2m = 2m+1-1$ 行を入れ替え、第2行と第 $2m+1-2 = 2m-1$ 行を入れ替え、...、第 m 行と第 $2m+1-m = m+1$ 行を入れ替えると、

$$\det\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix} = (-1)^m \det\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} = (-1)^m$$

が得る。同様に、$n = 2m+1$ のとき、第1行と第 $2m+2-1 = 2m+1$ 行を入れ替え、第2行と第 $2m+2-2 = 2m$ 行を入れ替え、...、第 m 行と第 $2m+2-m = m+2$ 行を入れ打得ると、

$$\det\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix} = (-1)^m \det\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} = (-1)^m$$

が得る。

<u>問題</u> 4. クラーメルの公式より、

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 5 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$