

練習問題その5 (解答)

問題 1. \mathbf{a} と \mathbf{b} は n 次の列ベクトルなので、 $n \times 1$ 型の行列である。よって、それぞれの転置行列 ${}^t\mathbf{a}$ と ${}^t\mathbf{b}$ は $1 \times n$ 型の行列となる。一般的に、 A は $m \times n$ 型の行列、 B は $n \times p$ 行列のとき、 AB は $m \times p$ 行列である。特に、次の答えが分かる。

(i) ${}^t\mathbf{a}\mathbf{b}$ は 1×1 型の行列である。

(ii) $\mathbf{a}{}^t\mathbf{b}$ は $n \times n$ 型の行列である。

問題 2. 行列ベクトルへの分割と列ベクトルへの行列は、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

行ベクトルへの分割

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

列ベクトルへの分割

問題 3. 行列 B を次のように分割しておく。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & O_{2,3} \\ C & E_3 \end{pmatrix} \quad \text{ただし} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

行列 A を同じように次の分割された行列とし、 A^n を計算する。

$$A = \begin{pmatrix} E_2 & O_{2,3} \\ D & E_3 \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad A^n = \begin{pmatrix} E_2 & O_{2,3} \\ nD & E_3 \end{pmatrix}$$

よって、 D を「 $nD = C$ 」を満たす行列とすればよい。すなわち、

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} & \frac{2}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{3}{n} \\ \frac{4}{n} & \frac{2}{n} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{n} & \frac{2}{n} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{3}{n} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{n} & \frac{2}{n} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 4. (i) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の表現行列は、 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(ii) $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の表現行列は、 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

(iii) $F \circ G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の表現行列は、

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

問題 5. 写像 $F \circ G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は、空間の原点 O と $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で定義された点 P を通る直線 ℓ に関して $2\pi/3$ 回転させる線形写像である。