練習問題その７ (解答)

問題 1. 教科書の１３１ページをご覧ください。

問題 2. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_{1,2}E_{1,2}(-2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = P_2(-1)E_{1,2}(2)E_{2,1}(-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}(-2)T_{1,2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E_{1,3}(-2)E_{2,3}(3)P_3(\frac{1}{4})E_{3,2}(-1)E_{2,1}(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_3(\frac{1}{2})E_{2,3}(-1)T_{2,3}T_{1,3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T_{1,2}E_{3,1}(-1)P_3(-\frac{1}{2})E_{3,2}(-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}(-3)P_2(-\frac{1}{2})E_{3,2}(-1)E_{2,1}(-1)E_{3,2}(-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 3. まず、$a \neq 0$ かつ $a \neq 3$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_1(1/a)E_{1,2}(-3)P_2(1/(a-3))E_{2,1}(-1)\begin{pmatrix} a & 3 \\ a & a \end{pmatrix}$$

なので、階数は 2 であることが得る。それから、$a = 0$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1(1/3)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので、階数は 1 であることが得る。最後に、$a=3$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1(1/3)E_{2,1}(-1)\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

なので、階数は 1 であることが得る。

<u>問題</u> 4. まず、$a \neq 11$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_1(\tfrac{1}{2})E_{3,2}(-1)E_{1,2}(-5)P_2(\tfrac{1}{a-11})E_{2,3}(-1)E_{2,1}(-2)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、階数は 3 であることが得る。それで、$a=11$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1(\tfrac{1}{2})E_{1,2}(-5)T_{2,3}E_{2,3}(-1)E_{2,1}(-2)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、階数は 2 であることが得る。