# 線形代数I・中間試験（解答)

問題 1 (20 点). 以下の正方行列 $A$ と各自然数 $n$ に対して、$A^n$ を求めよ。

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解答 1. $\quad(1)\quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & n \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^3 = E$ ため、$n = 3k$ のとき、

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$n = 3k + 1$ のとき、

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$n = 3k + 2$ のとき、

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

問題 2 (20 点). 次の各問いに答えよ。

(1) 平面の原点 $O$ を中心とし $\pi/2$ 回転させる線形写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$、直線 $y = x$ に関して対称な点を対応させる線形写像 $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、次のように表す。

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

成分 $a_{ij}$ と $b_{ij}$ を求めよ。

(2) 合成写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$、$G \circ F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、次のように表す。

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (G \circ F)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

成分 $c_{ij}$ と $d_{ij}$ を求めよ。

(3) 線形写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$、$G \circ F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の幾何的な記述を求めよ。

解答 2. (1) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) $F \circ G$ は、$y$ 軸に関して対称な点を対応させる線形写像で、$G \circ F$ は、$x$ 軸に関して対象な点を対応させる線形写像である。

問題 3 (20 点). 空間内の点 $A$、$B$ を次のように定める。

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

以下の各問いに答えよ。

(1) 線分 $AB$ のパラメーター表示を求めよ。

(2) 線分 $AB$ が平面 $x = 0$ と交わるか？交わる場合は、交点 $P$ を求めよ。

(3) 線分 $AB$ が平面 $y = 0$ と交わるか？交わる場合は、交点 $Q$ を求めよ。

(4) 線分 $AB$ が平面 $z = 0$ と交わるか？交わる場合は、交点 $R$ を求めよ。

解答 3. (1) 線分 $AB$ に乗っている点 $P$ は、次のように表される。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+3 \\ 4s-1 \\ -2s+1 \end{pmatrix} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$

(2) $x = 0 \Leftrightarrow -s + 3 = 0 \Leftrightarrow s = 3$ ため、線分 $AB$ が平面 $x = 0$ と交わらない。

(3) $y = 0 \Leftrightarrow 4s - 1 = 0 \Leftrightarrow s = 1/4$ ため、線分 $AB$ が平面 $y = 0$ と交わる。交点は、

$$Q = \begin{pmatrix} 11/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

である。

(4) $z = 0 \Leftrightarrow -2s + 1 = 0 \Leftrightarrow s = 1/2$ ため、線分 $AB$ が平面 $z = 0$ と交わる。交点は、

$$R = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

問題 4 (20 点). $A$ を集合、$F\colon A \to A$ を次の性質 (i)–(ii) を満たす写像とする。

(i) $F(a) \neq a$ を満たす元 $a \in A$ が存在する。

(ii) $F \circ F = F$

次の各問いに答え、その理由も述べよ。

(1) $F$ は単射であるか？

(2) $F$ は全射であるか？

解答 4 (その 1 ). (1) $F(a) \neq a$ を満たす $a \in A$ をとる。$F(a) \neq a$ であるが、$F(F(a)) = F(a)$ であるため、$F$ は単射でない。

(2) $F(a) \neq a$ を満たす $a \in A$ をとる。$a = F(b)$ を満たす $b \in A$ 存在するとき、

$$F(a) = F(F(b)) = F(b) = a$$

を得るため、$a = F(b)$ を満たす $b \in A$ が存在しない。特に、$F$ は全射でない。

解答 4 (その 2 ). $F$ は単射でも、全射でもない。なぜなら、次のように定める写像は、単射でも、全射でもないが、性質 (i)–(ii) を満たす。

$$A = \{a, b\}, \qquad F(a) = F(b) = b$$

問題 5 (20 点). 次の各問いに答えよ。

(1) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を空間内の点を $y$ 軸に関して $\pi$ 回転させる線形写像とする。このとき、

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を満たす行列 $A$ を求めよ。

(2) $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を空間内の点を平面 $z=0$ に関して対称な点を対応させる線形写像とする。このとき、

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を満たす行列 $B$ を求めよ。

解答 5. (1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$