1 opgave 1 p.86

Lad $f : \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,z) \longrightarrow \mathbb{R}$ være givet ved.

$$f(x,y,z) = (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2$$

opgave: Vis at 1 er en regulær værdi og identificer mangfoldigheden $M = f^{-1}(1)$.

Da f ikke er defineret på z-aksen skiftes koordinatsystem til cylinderkoordinater (polære kooordinater i planen, z-aksen overlever), dette letter beregningerne. f får så forskriften

$$f(r,\varphi,z) = (2 - r)^2 + z^2$$

.

At 1 er en regulær værdi indses ved at beregne de kritiske værdier. Differentialet $f_* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bestemmes v.h.a. Jacobi matricen Df.

$$Df_{(r,\varphi,z)} = [2(2-r), 0, 2z]$$

differentialet i punktet(r,φ,z) bliver altså:

$$f_*(r,\varphi,z)(x_1,x_2,x_3) = [2(2-r), 0, 2z] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

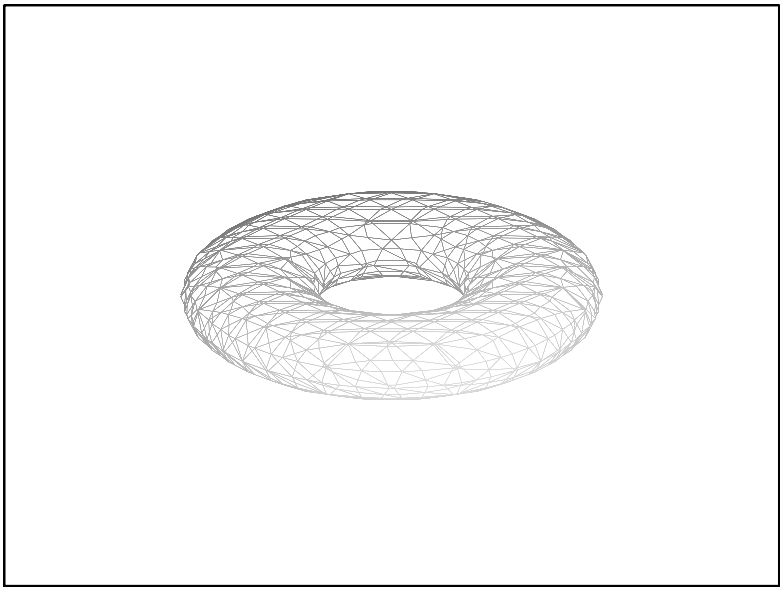
Denne afbildning er surjektiv medmindre r=2 og z=0. Så de kritiske punkter har formen $(2,\varphi,0)$, dette giver de kritiske værdier.

$$f(2,\varphi,0) = (2-2)^2 + 0^2 = 0$$

Så 1 er en regulær værdi. Da gælder at $f^{-1}(1)$ er en embedded delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3$. $f^{-1}(1)$ er løsninger til ligningen

$$f(r,\varphi,z) = (2-r)^2 + z^2 = 1$$

Løsningskurven i en meridianhalvplan (r,z-plan med fast φ) bliver en cirkel med radius 1 og centrum (2,0), de er nu let at se at $f^{-1}(1) = M$ er en torus.



2 opgave 2 p.86

Følgende lemme vil være nyttigt til løsning af opgave 2 og 3.

Lemma 2.1
Lad $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *være en differentiabel funktion og* a *en regulær værdi. Betegn med* M *den differentiable mangfoldighed* $M = \{f^{-1}(a)\}$ *Da gælder* $\nabla f(p) \cdot v = 0 \ \ \forall v \in T_pM$

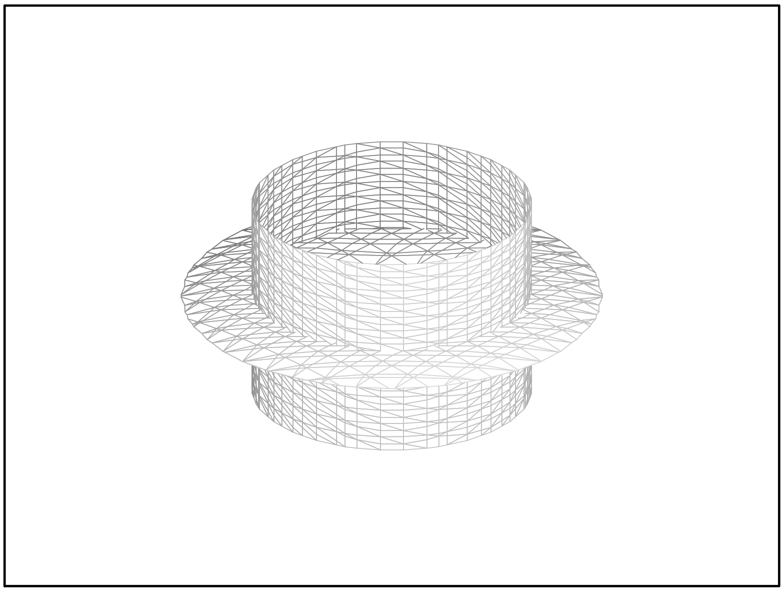
Bevis f er konstant på M og v er tangentvektor til en kurve γ fra M gennem p. Fra opgave 3 p. 80 ved vi at $D_\gamma f = \nabla f(p) \cdot v$ men da f er konstant er $D_\gamma f = 0$ $\square$

Dette lemma siger altså at $\nabla f(p) \perp T_pM$

Vis at M fra opgave 1 er transversal til fladen:

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 4\}$$

Først noteres at N er en differentiabel mangfoldighed fordi 4 er regulær værdi for funktionen $g(x, y, z) = x^2 + y^2$. N er blot en cylinder med radius 2 og centrum på z-aksen. Nedenstående skitse viser at $N \cap M$ består af 2 cirkler, beliggende i hhv. niveau z=-1 og z=1.



Lad $p \in N \cap M$ og lad mig antage at p ligger på cirklen i niveau z=1. Jeg skal så vise at $T_pN + T_pM = \mathbb{R}^3$. lemma 2.1 fortæller at dette er tilfældet hvis ved $\nabla g(p)$og $\nabla f(p)$ begge er egentlige vektorer og de ikke er paralelle. $\nabla f(p)$ (i cylinderkoordinater) beregnes i punktet $p(2, \varphi, 1)$:

$$\nabla f(p) = (2(2-2), 0, 2(1)) = (0, 0, 2)$$

$\nabla g(p)$ (i xyz-koordinater) beregnes i punktet $p(x, y, 1)$, hvor $x^2 + y^2 = 4$ (så x og y er ikke 0 samtidigt).

$$\nabla g(p) = (2x, 2y, 0))$$

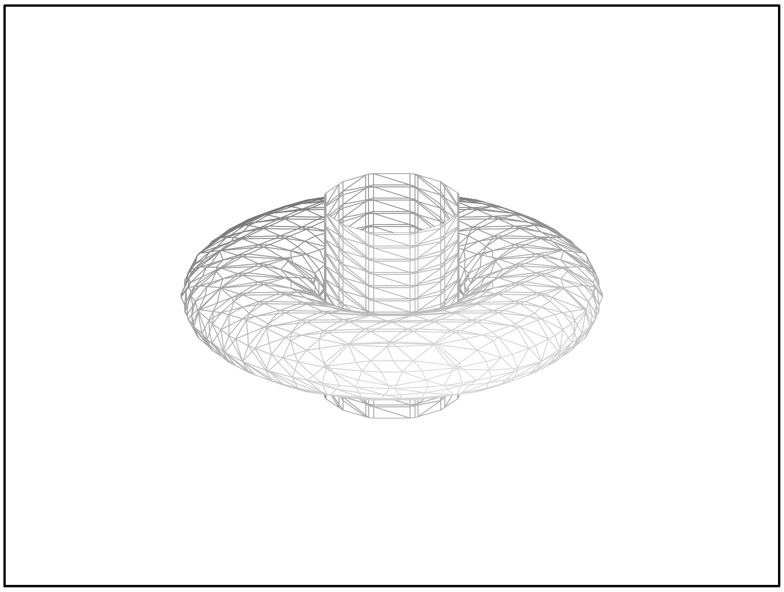
Da gradienterne begge er egentlige vektorer, og de ikke har samme retning ses at tangentrummene udspænder hele $\mathbb{R}^3$ så skæringen er transversal.

3 opgave 3 p.86

Vis at M fra opgave 1 ikke er transversal til fladen:

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$$

Først noteres at N er en differentiabel mangfoldighed fordi 1 er regulær værdi for funktionen $g(x, y, z) = x^2 + y^2$. N er blot en cylinder med radius 1 og centrum på z-aksen. Nedenstående skitse viser at $N \cap M$ består af 1 cirkel, beliggende i xy-planen.



Med præcist de samme argumenter som i opgave 2 vil man se at, hvis $p \in M \cap N$, så er $\nabla g(p)$ og $\nabla f(p)$ paralelle, så skæringen er ikke transversal. $M \cap N$ er en cirkel og dermed en mangfoldighed.

4 Opgave 6 p. 82

Lad $C : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ være en embedded delmangfoldighed. Opgaven er at vise at der findes en hyperplan $H \simeq \mathbb{R}^3$ så den orthogonale projektion $\pi_H \circ C : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er en embedded delmangfoldighed. Alle afbildninger her er differentiable så de eneste der kan gå galt er at $\pi_H \circ C : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eller $(\pi_H \circ C)_* : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ikke bliver injektiv. Først noteres at π_H er bestemt ved retningen af en normalvektor til H. Altså kan mængden af projektioner identificeres med $S^3/\pm \simeq \mathbb{R}P^3$. For at se at vi kan finde en projektion så $\pi_H \circ C : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ og dens differential bliver injektive noteres at de projektioner π_H der giver anledning til ikke injektive afbildninger $\pi_H \circ C$ er projektioner langs retninger givet ved enhedsnormalvektorer n:

$$n = \frac{\pi_H \circ C(x_1) - \pi_H \circ C(x_2)}{||\pi_H \circ C(x_1) - \pi_H \circ C(x_2)||}$$

Vi har nu en differentiabel afbildning $n : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^3$ givet ved ovenstående forskrift, hvis $x_1 \neq x_2$. $n(x, x)$ defineres ved grænseværdien

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{\pi_H \circ C(x) - \pi_H \circ C(x_0)}{||\pi_H \circ C(x) - \pi_H \circ C(x_0)||}$$

der er veldefineret (dvs.$\lim_{x \longrightarrow x_{0_+}} = \lim_{x \longrightarrow x_{0_-}}$) i $\mathbb{R}P^3$. Denne grænseværdi er en tangentvektor til C i punktet x . Denne påstand er bevist i nendenstående lemma.

Alle de projektioner der gør $\pi_H \circ C : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ og dens differential ikke injektive, er altså givet ved retninger der ligger i billedet af $n : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^3$ men $S^1 \times S^1$ er 2-dimensionel og $\mathbb{R}P^3$ er 3-dimensionel, hvorfor billedet udelukkende består af kritiske værdier. Sards sætning giver at der findes regulære værdier, hvorfor vi kan lave en projektion π_H der gør $\pi_H \circ C : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv og ikke sender nogle tangentvektorer i 0.

Lemma 4.1
Lad $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ være en regulær injektiv kurve. Da gælder

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{||\gamma(t) - \gamma(t_0)||} = r\gamma'(t_0)$$

hvor $r \in \mathbb{R}\{0\}$

bevis:

Definitionen af tangentvektor er.

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{||t - t_0||}$$

jeg kan konstruere lokale parametriseringer så:

$$||t - t_0|| < ||\gamma(t) - \gamma(t_0)||$$

vha. lokal graf sætning (Plesners 3ge noter). og så

$$||t - t_0|| > ||\gamma(t) - \gamma(t_0)||$$

ved parametrisering v. buelængde. Disse facts mener jeg giver resultatet.