

Matematik KM 2003

Projekt B: Funktionsundersøgelse og plotning med Maple

20. oktober 2003

Dette projekt er det andet af 3 projekter, der indgår i eksamen på Matematik KM i 2003. Projektet skal sendes som en fil med navnet projb.mw med email til Jørn <olsson@math.ku.dk>.

Afleveringsfrist: Fredag 31. oktober

Den matematiske baggrund for første opgave

Denne findes i form af tre håndskrevne ark, der er vedhæftet denne projektopgave. Det er nødvendigt at have disse tre ark ved løsningen af projektet.

Opgave 1

Nedenstående funktionsundersøgelse illustrerer blandt andet nogle af de ting, der er beskrevet i den matematiske baggrund.

Vi betragter funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x)/\ln(|x|), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(1) Definer funktionen f i Maple og giv kommandoen `plot(f(x), x=-2..2);` og kommenter grafens eventuelle "særheder". (Det kan være en ide at "begrænse" plottet ved at tilføje `(y=-10..10)`). Hvordan kan man få fjernet de lodrette linier i plottet?

(2) Benyt Maple til at kontrollere, at f er kontinuert i 0 (og dermed i alle reelle tal på nær ± 1).

(3) Brug Maple som hjælp til at afgøre, om funktionen f er differentiabel i punktet 0. Find endvidere et udtryk for $f'(x)$ for $x \notin \{0, \pm 1\}$. Forklar hvad `abs(1, x)` er.

Den videre opgave går nu ud på at lave bedre plots af funktionen f over forskellige intervaller.

(4) Der ønskes et plot af f over intervallet $]1, 5[$ der tydeligt viser placeringen af eventuelle ekstremumpunkter og asymptoter. Angiv på plottet endvidere tangenten til grafen i et punkt hvor funktionen er aftagende og funktionsværdien er lig med $-1/2$.

(5) Der ønskes et detaljeret plot af f på et lille interval omkring nul. Dette plot skal tydeligt illustrere at f er kontinuert i 0. Koordinataksler må ikke sløre resultatet. Udregn og indtegn endvidere middelværdien af f over det valgte interval.

Baggrunden for anden opgave

Israels Lab 9 samt de to udleverede worksheets “Inverse funktioner” og “Spejling”.

Opgave 2

Betragt funktionen $k(x) := (x + 1)(x - 4)/(x - 5)$ på intervallet $I = [-2..4]$.

(1) Plot $k(x)$ på intervallet I og forklar, hvorfor k ikke har en invers funktion på dette interval.

(2) Bestem ved hjælp af Maple ekstremværdierne af k i intervallet I .

(3) Gør rede for at k har inverse funktioner på hver af intervallerne $I_1 = [-2..a]$ og $I_2 = [a..4]$, hvor a er det punkt i intervallet I , hvor k antager den største værdi. Bestem definitionsområdet for disse inverse funktioner, som vi kalder g_1 og g_2 .

(4) Lav plots, som viser k på intervallet I_1 og den tilhørende inverse funktion g_1 som spejlbillede til hinanden i linien $y = x$. Der skal i hvert plot kun vises de relevante kurvestykker og plottet for $y = x$. Gør derefter det tilsvarende for k og g_2 på intervallet I_2 .

(5) Lav til sidst et plot, som inkluderer f på intervallet I , og g_1 og g_2 på de relevante intervaller på en sådan måde, at de kurvestykker, der repræsenterer funktioner, som er inverse til hinanden, har samme farve. Tilføj navnene på kurvestykkerne g_1 og g_2 som tekst på passende steder i plottet og giv hele plottet en titel.