

Matematik KM 2003

Projekt A: Eksperiment og argument med Maple

18. september 2003

Dette projekt er det første af tre projekter, der indgår i eksamen på Matematik KM i 2003. Projektet afleveres i grupper på 1-3 personer. Projektet skal afleveres senest

Mandag den 29. september 2003 kl. 12.00

Aflevering

Besvarelsen skal bestå af en Maple fil **projekta.mws**. Denne fil skal kunne udføres af den version af Maple 9, som er installeret på computersystemet ved Institut for Matematiske Fag. Hvis der arbejdes hjemme, anbefales det, at man overfører filen til sit hjemmekatalog på Instituttet, udfører den her og sender den herfra som attachment til en email til Jørn Olsson (*olsson@math.ku.dk*).

Hvert af projektgruppens medlemmer skal opbevare en kopi af besvarelsen i sit hjemmekatalog.

Besvarelsen skal ud over de relevante Maple kommandoer indeholde tekst, der beskriver formålet med kommandoerne og konklusioner på uddata fra Maple. Skriv endvidere øverst i filen navn og personnummer for samtlige deltagere i gruppen. Indsæt endvidere **>restart;** som første kommando i besvarelsen og som første kommando i hver opgave. Den indsendte fil bør have Maple-output fjernet. (Brug Edit → Remove Output → From Worksheet) Den bedste måde at teste sin besvarelse er i øvrigt at bruge **!!!**-knappen. Så fjernes Maple-output og alle kommandoer udføres igen fra ende til anden.

De tre opgaver på de følgende sider skal løses.

Opgave 1:

1) En matematikstuderende¹ har tænkt sig at bruge Maple til at finde et udtryk for summen

$$1 + 2 + \dots + n$$

(hvor n er et positivt heltal) og indtaster (og udfører) derfor følgende kommandoer i Maple:

```
>restart;  
>s(n):=sum(k,k=1..n);  
>s(n);
```

Nu vil studenten udregne summen $1+2+3$ i Maple og skriver derfor

```
>s(3);
```

Hvad viser Maple som uddata? Hvad er der galt? Beskriv hvilken fejl der er begået (OG HUSK DEN!!)

2) Indtast nu summen

$$t(n) = 1 + 2^2 + \dots + n^2$$

i Maple på en sådan måde, at `t(n);` giver en generel formel for summen og `t(3);` giver uddata 14.

3) Lav endvidere i Maple en funktion **F** som gør følgende. Hvis man tænker sig, at **d** er et vilkårligt men **kendt** naturligt tal (f.eks. kunne **d** være 5 eller 11) så vil kommandoen

```
>F(d);
```

give en formel for summen

$$1 + 2^d + \dots + n^d.$$

Hvilket svar giver Maple hvis du giver kommandoen `F(ukendt);` med en ukendt eller fri heltalsvariabel **ukendt**?

4) Check til sidst, om Maple umiddelbart “kender” alle formlerne (5)-(9) i slutningen af Matematik 1GA’s Projekt om Induktion:

<http://www.math.ku.dk/kurser/mat1ga/projekt03.pdf>

Bemærkning: Kommandoen `>factor;` kan være nyttig i opgave 1.

Opgave 2:

Vi betragter funktionen

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \quad x > 0.$$

Opgaven går ud på at gætte egenskaber for de højereordensafledede af denne funktion ved symbolsk differentiation og grafisk repræsentation.

1) Udregn de afledede af f op til og med orden 4. Prøv på dette grundlag at se, hvordan de afledede opfører sig. Kan I ane et generelt system for disse afledede?

2) Lav et pænt plot de afledede af orden op til og med 4 på intervallet $]0, 1[$ i samme koordinatsystem. Nævn nogle karakteristika ved graferne. Hvilke egenskaber afspejler det for de afledede?

¹naturligvis ikke her på Naturvidenskab, KU

3) På grundlag af ovenstående undersøgelse er det naturligt at tro, at den n 'te afledede kan udtrykkes ved

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n}{x^{n+1}} + \frac{b_n \ln(x)}{x^{n+1}}, \quad \text{for } n \geq 1, \quad (1)$$

hvor a_n og b_n er passende hele tal. Vi skal nu undersøge disse tal nøjere. Kom med et kvalificeret gæt på b_n .

4) Det er sværere at gennemskue et system for tallene a_n , men det kan lade sig gøre:

$$a_n = -b_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Brug Maple som hjælpemiddel i et induktionsbevis, der viser formelen (1) med de fundne værdier for a_n og b_n .

Bemærkninger:

- i) Kommandoen `>expand;` kan være nyttig i denne opgave
- ii) I besvarelsen af det sidste punkt kan det ske, at den såkaldte Digamma-funktion Ψ forekommer. Se Maples hjælp til "Psi" og evt.
<http://mathworld.wolfram.com/HarmonicNumber.html>
 for en forklaring.

Opgave 3:

- 1) I en gammel formelsamling har jeg fundet dele af en formel, nemlig

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4} - \dots$$

Uheldigvis er resten af formelen ulæselig. Brug Maple til at finde en korrekt formel. Find dernæst grænseværdien for n gående mod uendeligt.

- 2) Find tilsvarende formler for grænseværdien af

$$\sum_{k=A+1}^n \frac{1}{k^2 - A^2}$$

for n gående mod uendeligt, hvor A er 2 eller 3.

Prøv eventuelt med $A = 0$ og med A ukendt. Bliv ikke skræmt af mystikken.