En hovedsætning i finansieringsteorien - og lidt om realkreditobligationer

David Lando, Afdeling for Operationsanalyse

1 Introduktion

Når der skal skrives noget om matematisk finansieringsteori er det et ritual at nævne Black-Scholes modellen for optionsprisfastsættelse. Men som så ofte ved nyttige matematiske resultater er det egentlig ikke selve formlen der er vigtig, men snarere det ræsonnement som ligger bag udledningen. Formlen bygger på et princip, som er så simpelt, at det er overraskende, at det overhovedet kan producere interessante konklusioner. Princippet er i sin enkelthed at finansielle aktiver, som har identiske fremtidige betalinger, uanset hvordan verden udvikler sig, må koste det samme idag. Hvis man ved hjælp af dette princip ønsker at beregne en 'fair' pris på et finansielt aktiv med komplicerede fremtidige betalinger, er problemet at finde en mængde 'basisaktiver', hvis priser man allerede kender, og heraf udregne prisen på det mere komplicerede aktiv ved simpelthen at skrive det mere komplicerede aktiv som en 'linearkombination' af basisaktiverne. 'Linearitet' af markeder er vigtig her: Hvis et aktiv handles til en bestemt pris, antager vi, at man kan købe og sælge en vilkårlig mængde af dette aktiv til samme pris pr. enhed. Når økonomer skal gøre grin med finansieringsteoretikere påstår de, at mens en økonom forsøger at finde prisen på en flaske ketchup ud fra udbud og efterspørgsel på tomater, forbrugeres nyttefunktioner, udbud af nære substitutter for ketchup etc., så beskæftiger finansieringsteoretikere sig med at finde prisen på to flasker ketchup ud fra prisen på een flaske ketchup, hvilket med en antagelse om lineær prisfastsættelse jo er til at overskue. Det som alligevel gør teorien interessant er en udvidelse af muligheden for at lave 'linearkombinationer' af 'basisaktiver' til dynamiske modeller, dvs. modeller som forløber over flere tidsperioden. Essentielt viser Black-Scholes' ræsonnementet, at man ved hjælp af simple 'basis-aktiver' og mulighed for

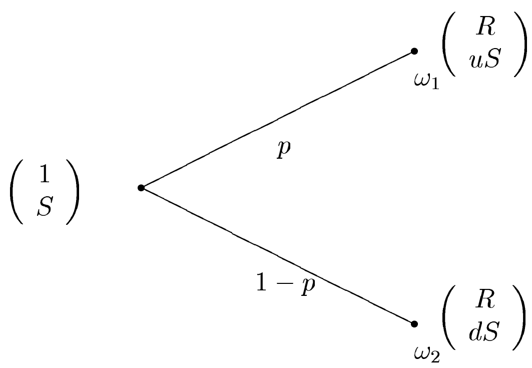
at løbende at handle disse aktiver over tid, kan udspænde en forbløffende rig mængde af 'afledte aktiver'. Formålet med denne artikel er at forklare denne pointe. Da indlægget er en side 9 sætning har jeg også indlagt en slags 'hovedsætning', som antyder, hvordan teorien hører sammen med begreber indenfor stokastiske processer. Faktisk viste teorien for stokastiske processer i kontinuert tid sig at være som skabt til problemer i stil med dem vi skal se på her - selvom denne teori var udviklet som selvstændig disciplin med andre problemer for øje. Denne pointe vil vi dog ikke have plads til at uddybe her. Vi vil også antyde hvordan denne teori kan bruges til at modellere priser på realkreditlån (herunder hvornår man skal indfri sådanne lån).

2 En-periode modellen

Vi betragter først en model for et finansielt marked over to tidspunkter $t = 0, 1$) og med to tilstande, ω_1 og ω_2. Ved periodens start $t = 0$ vides intet om hvilken tilstand, verden er i, men til tid $t = 1$ afsløres dette. Tilstandene ω_1, ω_2 antages at have sandsynlighederne henholdsvis p og $1 - p$. I modellen er givet to finansielle aktiver:

- En *aktie* som koster $S > 0$ til tid 0 og som er uS værd til tid 1 i tilstanden ω_1 og dS i tilstanden ω_2. Her er d, u ikke-negative konstanter.
- Et *pengemarkedsinstrument* som koster 1 til tid 0 og som er R værd til tid 1 uanset tilstanden.

Vi antager at $0 < d < R < u$. Hvis $R \leq 0$ ville ingen fornuftig person købe pengemarkedsinstrumentet for en strengt positiv pris, og faktisk ville grådige investorer have lyst til at sælge (vilkårligt) store mængder af aktivet. Det ville give en stor indtægt til tid 0 uden fremtidige forpligtelser. Det er også vigtigt, at R ligger klemt inde mellem d og u. (Det er naturligvis ligemeget om d eller u er størst.) Hvis for eksempel R lå under både d og u, ville det altid være at foretrække at holde aktien istedet for pengemarkedsinstrumentet, og man kunne med fordel finansiere et vilkårligt stort køb af aktier ved at låne i pengemarkedet. Det ville være som at have sin egen seddelpresse!



Antag nu, at der indføres et nyt aktiv, en *europæisk call option* på aktien med aftale pris K og *1*. Til tid 1 er værdien af denne call option lig med

$$C_1(\omega) = \begin{cases} [uS-K]^+ & \text{if } \omega = \omega_1 \\ [dS-K]^+ & \text{if } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

hvor vi bruger notationen $[X]^+ = max(0, X)$. Tænk på optionen som en kontrakt der giver ret, men ikke pligt, til at købe en aktie for en fast pris K til tid 1. Denne options værdi er præcis den 'rabat' som optionen giver på aktien i forhold til markedsprisen.

Lad $C_u = C_1(\omega_1)$ og $C_d = C_1(\omega_2)$. Spørgsmålet er nu, hvad prisen på denne call option skal være til tid 0. Vi finder svaret ved at skabe optionen kunstigt: Lad (a, b) betegne henholdsvis antallet af aktier og enheder af pengemarkedsinstrumentet som købes til tid 0. For at porteføljens betaling skal matche optionens uanset tilstand forlanges altså at følgende ligninger er opfyldt:

$$\begin{aligned} a(uS) + bR &= C_u \\ a(dS) + bR &= C_d \end{aligned}$$

dvs.

$$\begin{aligned} a &= \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} \\ b &= \frac{1}{R}\frac{uC_d - dC_u}{(u-d)} \end{aligned}$$

Prisen for at lave porteføljen (a, b) til tid 0 er $aS + b$. Dette må - ifølge vort fundamentale princip om, at ting der giver det samme, koster det samme - være optionens pris og efter lidt regneri ses dette at være

$$C_0 = \frac{1}{R}\left[\frac{R-d}{u-d}C_u + \frac{u-R}{u-d}C_d\right]$$

Hvis vi sætter

$$q = \frac{R-d}{u-d}$$

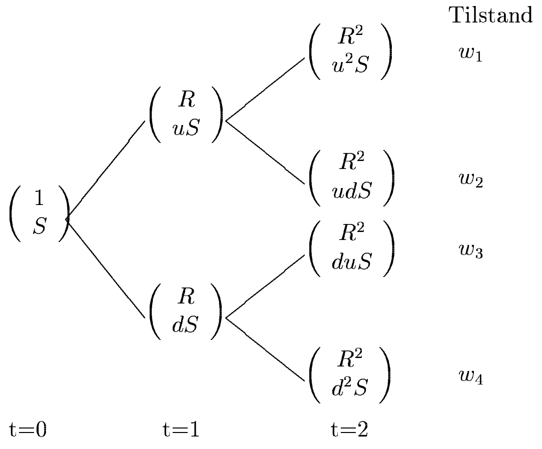
kan vi skrive prisen som

$$C_0 = q\frac{C_u}{R} + (1-q)\frac{C_d}{R}.$$

Læg mærke til at sandsynligheden p ingen rolle spiller for prisfastsættelsen - den er erstattet af en parameter q, som netop på grund af antagelserne om u, d og R kan fortolkes som en sandsynlighed. Vi bemærker også, at der intet specielt er ved optionen - vi kunne have valgt et hvilken som helst anden betalingsprofil til tid 1 og fundet den pris til tid 0, som er konsistent med de i forvejen givne priser.

3 Flere perioder

Det er naturligvis ikke en realistisk antagelse, at vores usikkerhed om aktiens bevægelser begrænser sig til to mulige værdier. På den anden side taber vi muligheden for kunstigt at skabe optionen, hvis vi indfører flere tilstande. Med for eksempel tre tilstande bliver ligningssystemet ovenfor til et system med tre ligninger med to ubekendte - og så er det kun i uinteressante tilfælde, at vi kan finde løsninger. Man kunne så indføre flere aktiver, men vi vil hellere gå en anden vej. Følgende eksempel viser princippet: Antag at $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ og at der er tre tidspunkter: $t \in \{0, 1, 2\}$. Lad stadigvæk $0 < d < R < u$. Vi specificerer nu aktiens og pengemarkedsinstrumentets opførsel som følger:



Som grafen viser tænker vi os samme mulige udvikling af aktiepris og pengemarkedsinstrumentet som før over den første periode, men for at kunne rumme endnu en periode i modellen har vi måttet anvende fire tilstande. Så for eksempel til tid 1, hvis tilstanden er ω_1 eller ω_2 (og vi tænker os at man ikke kan skelne mellem disse to til tid 1), da er prisen på aktien uS og pengemarkedsinstrumentet er steget til R. Herfra kan aktien så vokse yderligere til u^2S eller falde til duS. Bemærk, at $\omega \in \Omega$ beskriver en hel 'udfaldsfunktion' af aktien og pengemarkedet, dvs ω rummer hele historien til og med tidspunkt 2. Lad os igen som eksempel tage en europæisk call option med udløbsdato T=2 og aftalepris K. Vi vil nu bestemme hvad en fair pris er for denne option til tid 0. Til tid 2 er optionens værdi

$$C_2(\omega) = [S_2(\omega) - K]^+$$

hvor $S_2(\omega)$ er aktiens værdi til tid 2 hvis tilstanden er ω.

Det er håbløst generelt at finde en portefølje i aktien og pengemarkedet til tid 0, som kan holdes til tid 2, og som uanset hvad der sker giver samme værdi som optionen. Men vi tillader nu, at porteføljen kan omdannes på det mellemliggende tidspunkt $t = 1$. Og vi kan godt regne ud hvilken portefølje vi ønsker at holde til tid 1: Hvis for eksempel aktien til tid 1 er steget til uS, dvs. den sande tilstand er ω_1 eller ω_2, da ved vi, at der kun er to mulige værdier

for aktien til det følgende tidspunkt. Så vi kan til tid 1 bruge argumentet fra en-periode modellen og finde en portefølje som genererer samme cash flow som call optionen til tid 2: Find løsningerne for (a, b) i systemet

$$\begin{aligned} au^2S + bR^2 &= \left[u^2S - K\right]^+ \equiv C_{uu} \\ aduS + bR^2 &= [duS - K]^+ \equiv C_{du} \end{aligned}$$

og beregn prisen på at lave denne portefølje til tid 1 når prisen på aktien er uS. Efter lidt regneri finder man at prisen på porteføljen - og dermed optionens værdi - i denne situation er

$$C_u \equiv auS + bR = \frac{1}{R}\left[\frac{(R-d)}{(u-d)}C_{uu} + \frac{(u-R)}{(u-d)}C_{ud}\right]$$

Tilsvarende finder vi, at værdien i 'ned-tilstanden', dvs. til tid 1 med en aktiepris på dS, er givet ved

$$C_d = \frac{1}{R}\left[\frac{(R-d)}{(u-d)}C_{ud} + \frac{(u-R)}{(u-d)}C_{dd}\right].$$

hvor $C_{dd} = [d^2S - K]^+$. For nu at have en strategi for dynamisk at skabe call optionen, ser vi, at vi til tidspunkt 0 blot skal sørge for at lave en portefølje, hvis værdi er C_u, når aktien bliver uS værd og C_d, når aktien bliver dS værd. Prisen for at gøre dette er - igen ved anvendelse af en-periode strategien -

$$C_0 := \frac{1}{R}\left[\frac{(R-d)}{(u-d)}C_u + \frac{(u-R)}{(u-d)}C_d\right].$$

hvilket vi med samme definition af q som ovenfor kan skrive som

$$C_0 = \frac{1}{R^2}\left[q^2C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right].$$

En investor, som har beløbet C_0, kan altså til tid 0 lave en portefølje bestående af aktien og pengemarkedsinstrumentet, som er enten C_u eller C_d værd til tid 1 afhængigt af aktiens udvikling. Ved derefter at omforme porteføljen til tid 1, dvs. ved (uden brug af ekstra kapital) at flytte penge fra det ene aktiv til det andet, kan investoren lave en portefølje til tid 1 som sikrer at porteføljens værdi matcher optionens til tid 2. Prisen på optionen må så ifølge vort fundamentale princip være C_0. Selvom optionen altså blev mere kompliceret og kunne antage op til fire forskellige værdier (i eksemplet er der dog to af de mulige værdier til tid 2 der er ens), kunne vi stadigvæk nøjes med to aktiver, sålænge vi havde mulighed for at rebalancere porteføljen. Denne indsigt kan virke enkel, men den er ikke desto mindre særdeles produktiv.

4 Prisprocesser, handelsstrategier og ingen arbitrage

Lad os nu se lidt på matematikken bag disse eksempler. Givet et sandsynlighedsfelt (dvs. mængde, sigma-algebra og sandsynlighedsmål) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med Ω endelig[1]. Lad $\mathcal{F} := 2^{\Omega}$ (dvs. mængden af alle delmængder) af Ω) og antag at $P(\omega) > 0$ for alle $\omega \in \Omega$. Antag endvidere, at der er $T+1$ tidspunkter, startende med tidspunkt 0 og sluttende med tidspunkt T. Et særkende ved teorien for stokastiske processer er en såkaldt *filtrering* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{T}$ defineret som en voksende følge af σ-algebraer indeholdt i $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_T$. Man kan tænke på filtreringer som en model for hvordan information om den sande tilstand øges over tid. At en mængde A tilhører $\mathcal{F}_t$ betyder simpelthen at det uanset hvilket ω der er det 'sande' ω er muligt at afgøre til tid t om hændelsen A er indtruffet eller ej. Vi vil som regel antage, at $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Eftersom Ω er endelig er det måske nemmest at tænke på en $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_t$ som frembragt af en klassedeling $\mathcal{P}_t$ af Ω, Elementerne i $\mathcal{P}_t$ er blot *atomerne* i $\mathcal{F}_t$. Bemærk at en stokastisk variabel (dvs. en målelig funktion defineret på Ω) er målelig med hensyn til sigma-algebraen $\mathcal{F}_t$, netop når den er konstant på hvert element i $\mathcal{P}_t$.

Vi definerer nu en stokastisk proces X som en følge af stokastiske variable[2] $(X_0, X_1, \ldots, X_T)$ og siger at X er tilpasset hvis X_t er $\mathcal{F}_t-$målelig for alle $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$. Hermed er maskineriet klar til at modellere finansielle markeder i flere perioder. Et sådant marked består af en vektor af tilpassede *dividende processer*

$$\delta = (\delta^1, \ldots, \delta^N)$$

og en vektor af tilpassede *aktiv processer*

$$S = (S^1, \ldots, S^N).$$

Fortolkningen er som følger: $S_t^i(\omega)$ er prisen på aktiv i til tid t hvis tilstanden er ω. Købes det *i'te* aktiv til tid t giver det køberen retten til de resterende dividender $\delta_{t+1}^i, \delta_{t+2}^i, \ldots, \delta_T^i$. [3] Vi vil også antage, at der i markedet er et

[1]Egentlig er det lidt krukket at snakke om sigma-algebra, men vi kan ligeså godt antyde hvordan billedet ser ud i modeller med uendeligt tilstandsrum.

[2]Indeksmængden er her $0, 1, \ldots, T$, men vi vil også se processer som starter til tid 1 eller slutter til tid $T-1$.

[3]Allerede her begynder vi at undertrykke ω i notationen - en gammel tradition i sandsynlighedsregningen...

pengemarkedsinstrument, som giver lokalt risikofri låne-og udlånsmulighed: Givet en tilpasset proces for *den korte rente*

$$\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{T-1}),$$

som vi er nødt til at antage større end -1 i alle tilstande, og som fordi det er en rente med fordel endda kan tænke på som større end 0. Fra denne defineres pengemarkedsinstrumentet som et aktiv med prisproces

$$\begin{aligned} S_t^0 &= 1, \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1 \\ S_T^0 &= 0. \end{aligned}$$

og tilhørende dividendeproces

$$\begin{aligned} \delta_t^0(\omega) &= \rho_{t-1}(\omega) \text{ for alle } \omega \text{ og } t = 1, \ldots, T-1, \\ \delta_T^0(\omega) &= 1 + \rho_{T-1}(\omega). \end{aligned}$$

Bemærk, at man ved at placere 1 i pengemarkedsinstrumentet til tid t og efterfølgende sælge det til tid $t+1$ får en betaling på $1 + \rho_t$, som er kendt allerede til tid t. Derfor kalder vi aktivet for lokalt risikofrit. Den korte rente minder om rentesatser i en bank, der kendes over korte perioder, men som kan ændres med kort varsel[4]. Investeres 1 i pengemarkedsinstrumentet til tid s og reinvesteres dividenderne i samme instrument får man 'renters rente', og beløbet vil til tid t være vokset til

$$R_{s,t} \equiv (1 + \rho_s) \cdots (1 + \rho_{t-1}).$$

En handelsstrategi er en tilpasset (vektor-)proces

$$\phi = (\phi_t^0, \ldots, \phi_t^N)_{t=0,\ldots,T-1}.$$

Fortolkningen er, at $\phi_t^i(\omega)$ er antallet af det i'te aktiv som indgår i porteføljen som vælges til tid t hvis tilstanden er ω. Kravet om tilpassethed er meget vigtigt, da det svarer til en antagelse om at investor ikke kan se frem i tiden og udnytte anden viden end den som allerede er afsløret i markedet.

Dividende-processen genereret af strategien ϕ skrives δ^{ϕ}, og den er defineret ved

$$\begin{aligned} \delta_0^{\phi} &= -\phi_0 \cdot S_0 \\ \delta_t^{\phi} &= \phi_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) - \phi_t \cdot S_t \text{ for } t = 1, \ldots, T. \end{aligned}$$

[4]Vi er straks noget længere væk fra den barske virkelighed med vores antagelse om, at ind- og udlån har samme rente.

Fortolkningen af nederste ligning er simpelthen, at den mængde penge vi får i hånden (eller må hoste op med) til tid t er forskellen mellem værdien af den portefølje, vi bringer med os fra sidste periode og den portefølje vi ønsker at investere i til tid t. Og nu til den definition som skal bruges til at formulere kravet svarende til $d < R < u$ i eksemplerne ovenfor: En *arbitragemulighed* er en handelsstrategi for hvilken δ_t^ϕ er en positiv proces, dvs. en proces som aldrig er negativ, og for hvilken $\delta_t^\phi(\omega) > 0$ for mindst et par (t, ω). En model er *arbitrage-fri,* hvis den ikke indeholder arbitragemuligheder.

En arbitragemulighed er altså en handelsstrategi som uden nogensinde at kræve kapitaltilførsel giver positiv sandsynlighed for at modtage penge på et eller andet tidspunkt.

5 Hovedsætningen om eksistens af ækvivalent martingalmål

Vi er nu nået til en version af det som på engelsk kaldes 'the fundamental theorem of asset pricing.' Sætningen forklarer det mystiske q som indfandt sig i de simple eksempler ovenfor. Først skal vi have nogle flere begreber på plads: Antag $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_u$. Den betingede middelværdi af en $\mathcal{F}_u-$målelig stokastisk variabel X_u givet $\mathcal{F}_t$ er en stokastisk variabel $E(X_u|\mathcal{F}_t)$ som er $\mathcal{F}_t-$målelig og opfylder

$$\int_{A_t} E(X_u|\mathcal{F}_t)dP = \int_{A_t} X_u dP$$

for alle $A_t \in \mathcal{F}_t$. [5] I vores simple model med sigma-algebraer frembragt af atomerne, kan vi skrive den betingede middelværdi ovenfor op helt eksplicit som

$$E(X_u|\mathcal{F}_t)(\omega) = \sum_{A_v \in \mathcal{P}_u : A_v \subset A_t} X_u(A_v)P(A_v|A_t) \text{ for } \omega \in A_t$$

hvor vi har skrevet $X_u(A_v)$ for værdien af $X_u(\omega)$ på mængden A_v og hvor $A_t \in \mathcal{P}_t$. En stokastisk proces X er en *martingal* med hensyn til filtreringen $\mathbb{F}$, hvis den opfylder

$$E(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1} \quad \text{alle } t = 1, \ldots, T.$$

[5] Egentlig skal vi i det generelle tilfælde også sige, at X antages integrabel, men i vores endelige tilstandsrum er dette automatisk opfyldt

Når det er klart hvilken filtrering der betragtes, vil vi bruge notationen $E_s X(t) := E(X(t)|\mathcal{F}_s)$. Endelig defineres følgende versioner af pris-og dividendeprocesser, hvor alle størrelser er tilbagediskonterede:

$$\widetilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{R_{0,t}} \qquad t = 0, \ldots, T,$$
$$\widetilde{\delta}_t^i = \frac{\delta_t^i}{R_{0,t}} \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Et sandsynlighedsmål Q på $\mathcal{F}$ er et ækvivalent martingal mål (ÆMM) hvis $Q(\omega) > 0$ alle ω og for alle $i = 1, \ldots, N$ gælder

$$\widetilde{S}_t^i = E_t^Q\left(\sum_{j=t+1}^{T} \widetilde{\delta}_j^i\right) \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{1}$$

Navnet martingalmål har følgende forklaring: Givet en (en-dimensional) prisproces S, hvis tilhørende dividendeproces kun betaler dividende δ_T til tid T. Da giver eksistensen af et ÆMM

$$\widetilde{S}_t = E_t^Q\left(\widetilde{\delta}_T\right) \qquad i = 1, \ldots, T-1,$$

En proces, der fremkommer ved at tage en betinget middelværdi af en fast stokastisk variabel med hensyn til en finere og finere sigma-algebra, er en martingal, så processen $(\widetilde{S}_0, \widetilde{S}_1, \ldots, \widetilde{S}_{T-1}, \widetilde{\delta}_T)$ er en martingal. Vi kan nu formulere hovedsætningen i tilfældet med endeligt tilstandsrum:

Sætning
For markedet defineret ovenfor er følgende to udsagn ækvivalente:

1. Markedet er arbiragefrit
2. Der eksisterer et ækvivalent martingalmål

Vi vil ikke se på beviset her[6]. Hovedarbejdet i beviset for sætningen ligger i at vise, at ingen arbitrage er ensbetydende med eksistensen af en strengt positiv, lineær prisfunktional F, som er defineret på rummet $\mathbb{L}$ af stokastiske processer på vort filtrerede sandsynlighedsfelt, og som opfylder $F(\delta^\phi) = 0$ for

[6] Et detaljeret bevis findes i noterne til Investerings-og finasieringsteori på 3. år, og det relevante kapitel fra disse kan findes på `http://www.math.ku.dk/ dlando/frl.htm` .

enhver dividendeproces i $\mathbb{L}$, som kan opnås ved en handelsstrategi ϕ. Dette arbejde bygger på en separationssætning ($\mathbb{L}$ er jo bare et endelig-dimensionalt vektorrum). Når funktionalen så er defineret, kan den repræsenteres ved et mål. Det kræver så en passende normering at få et sandsynlighedsmål, og noget arbejde med sindrige handelsstrategier at vise, at målet har martingalmål-egenskaben (1).

6 Om anvendelser i rentestruktur-teori

Lad os til sidst se på et par anvendelser af hovedresultatet. En meget populær anvendelse af teorien er i såkaldt rentestrukturteori, dvs. den teori som forsøger samlet at beskrive udviklingen af priser for obligationer med forskellige løbetider og betalingsprofiler.

Som grundlæggende byggeklods er det naturligt her at bruge *nulkuponobligationer* med forskellige løbetider. En nulkuponobligation (NKO) er en obligation, som kun udbetaler et beløb ved udløbsdatoen. Sådanne obligationer er en slags 'kanoniske enhedsvektorer' i obligations-verdenen.

Lad $P(t,T_i)$, $0 \le t \le T_i \le T$, være prisen til tid t på en NKO med udløbstidspunkt T_i. Hvis vi skulle være helt konsistente med vores notation fra sidste afsnit, burde vi egentlig kun skrive $P(t,T_i)$ for NKO-prisen for $t < T_i$ og så lade en tilhørende dividendeproces klare udbetalingen til tid T_i ved at sætte $\delta(T_i) = 1$. Men for obligationer skriver vi dividenden ind i prisen og vedtager at $P(t,t) = 1$ for alle $t \le T$. Fra hovedsætningen om arbitragefri markeder følger nu, at en model bestående af pengemarkedsinstrumentet (defineret ud fra den stokastiske kort-rente proces) og NKO'er er arbitragefri, hvis og kun hvis

$$\left(\frac{P(t,T_i)}{R_{0,t}}\right)_{0\le t\le T_i}$$

er en martingal for hvert T_i under et ÆMM Q. Det er imidlertid ikke så let lige at skrive en fornuftig model op for den simultane udvikling af NKO'er med alle løbetider (men det ville være let nok at checke, om en model havde et ÆMM). Det faktum, at obligationerne er bundet til at ende i værdien 1, gør dette en smule vanskeligere end blot at modellere en aktie. Når man i virkelighedens verden skal prisfastsætte optioner på obligationer (og i Danmark er alle optioners moder jo realkreditobligationens mulighed for førtidsindfrielse til kurs 100,) så kan man nøjes med at have en fornuftig model under et passende valgt mål Q. Hvis man har en fornuftig proces for den korte rente

$\rho = (\rho_t)_{t=0,\dots,T-1}$, definerer

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_t).$$

og ydermere har et mål Q, kan man simpelthen definere obligationspriserne som følger:

$$P(t,T_i) = E_t^Q\left[\frac{1}{R_{t,T_i}}\right] \text{ for } 0 \le t \le T_i \le T, \tag{2}$$

Da er systemet bestående af pengemarkedsinstrumentet og obligationspriserne $(P(t,T_i))_{t=0,\dots,T_i\le T}$ arbitrage-frit. Dette følger af, at for $t \le T_i$ er

$$\frac{P(t,T_i)}{R_{0,t}} = \frac{1}{R_{0,t}} E_t^Q\left[\frac{1}{R_{t,T_i}}\right] = E_t^Q\left[\frac{1}{R_{0,T_i}}\right].$$

Hvordan vælger man Q og processen for den korte rente? Dette er en øvelse i det man kalder kalibrering af rentestrukturen, og det er svært at gå i detaljer her. Men ofte foregår det helt simpelt ved, at man arbitrært fastsætter værdien af Q således, at den korte rente går op med sandsynlighed 0.5 eller ned med sandsynligheden 0.5. Ved så at lade størrelsen af springene afhænge af parametre som kan varieres, kan man jo fastsætte disse parametre således, at priserne i modellen svarer til de priser på statsobligationer (der er linearkombinationer af NKOer), som man ser i markedet. Håbet er så, at en model der rammer statsobligationerne ikke tager helt fejl med hensyn til optioner på disse. Lad os til sidst illustrere, hvordan man efter sådan en kalibrering kan begynde at diskutere prisfastsættelse (og dermed førtidsindfrielse) af realkreditobligationer. Vi laver her et simpelt eksempel baseret på et stående lån [7]. I regnerarket[8] nedenfor er angivet parametre u, d, q som specificerer udviklingen af den korte rente: Givet at renten til tid t er ρ_t antager vi, at den springer til $u\rho_t$ med sandsynlighed q og til $d\rho_t$ med sandsynlighed $1-q$. Renten antages at starte på niveauet 5%. Man kan nu ved at benytte (2) beregne priser på nulkuponobligationer. I praksis vil man sætte sine parametre således, at de beregnede priser matcher priser, man kan observere i virkeligheden. Ofte vil dette kræve at u og d kan variere over tid, men

[7] De fleste realkreditlån er set fra låntagers side en annuitet, mens køberen af en realkreditobligation har et stående lån, når der ikke tages hensyn til konvertering. De løbende afdrag, som låntager leverer fordeles ved 'udtrækning' mellem långivere. Men tænk ikke på det her.

[8] En EXCEL fil med dette regneark (Ark 2 i filen) kan hentes fra `http://www.math.ku.dk/ dlando/frl.htm` .

samtidig vil man så i praksis også søge at ramme variansen af priser rigtigt - de såkaldte volatiliteter. Nu tænker vi os, at parametrene u, d er valgt så alle beregnede priser på nulkuponobligationer (ikke vist) i fire-periode modellen nedenfor passer med virkeligheden. Vi forestiller os - noget urealistisk - at vi kan klare os med tidsuafhængige u, d. Betragt herefter et 5% stående lån med udløbstid $T = 4$, som vi vil kalde en statsobligation, da dette lån ikke kan indfries før udløb. Til tid $T = 4$ betaler dette lån altså hovedstolen 100 tilbage og en kupon på 5. På tidspunkterne 1,2 og 3 betaler lånet 5 i dividende. For hver periode og hvert muligt niveau af den korte rente er angivet prisen på dette stående lån (99,77 til tid 0, 98,25 i optilstanden til tid 1 etc.). Denne pris er beregnet ved at kombinere passende mængder af nulkuponobligationer. Hvorledes adskiller et lån med førtidsindfrielse sig fra statslånet? Låntager har her mulighed for i hver periode at slippe ud af lånet ved at betale hovedstolen på 100 tilbage (sammen med kuponen hørende til perioden). Herved modtager långiveren (obligationsejeren) hovedstolen 'før tid'. Når renten er faldet er dette ikke så godt for obligationsejeren, som det ville have været at modtage kuponerne på 5% i resten af lånets løbetid. Hvor meget mindre skal obligationen med mulighed for førtidsindfrielse så koste? Dette problem løses 'baglæns'. Hvis lånet med førtidsindfrielse (som vi kalder RKO for at det skal lugte af realkreditobligationer) ikke er blevet indfriet til tidpunkt 4, er dets værdi den samme som statsobligationens, da de jo begge udløber her. Hvis RKOen ikke er indfriet til tid 3, har låntageren mulighed for at slippe ud af lånet ved at betale 100, men kan også vente en periode med at betale 100 og skal så også betale 5 i kupon til tidspunkt 4. Værdien af RKO'en beregnes så i alle mulige tilstande for den korte rente til tid 3 ved at sammenligne værdien af 100 med $105/(1+\rho_3)$, som er værdien af obligationen til tid 3, hvis den ikke indfries. Vi ser, at ved et lavt renteniveau kan det bedste betale sig for låntager at indfri lånet, og da vi antager at låntager handler rationelt, bliver værdien af RKOen derfor 100. (Værdien af statsobligationen ved et renteniveau på 3,65% til tid 3 er 101,31). Ved samme procedure arbejder man sig nu tilbage i træet og finder værdien af RKO til tid $t-1$ som

$$RKO_{t-1} = min\left(100, E_{t-1}\frac{RKO_t + 5}{1+\rho_{t-1}}\right)$$

hvilket netop afvejer værdien af den førtidsindfriede obligation (100) mod værdien af i næste periode t at modtage kuponen 5% og sidde med RKOen på hånden. Som vi ser, får realkreditobligationen mindre værdi end stat-

sobligationen. Da man i beregning af effektiv rente for obligationer ikke tager højde for førtidsindfrielse, får realkreditobligationen herved en højere effektiv rente end statsobligationen. De effektive renter er beregnet til 5,07% for statsobligationen og 5,25% for RKOen. Endelig er som et kuriosum indlagt prisen på en obligation med førtidsindfrielse, hvor der (meget realistisk) er omkostninger ved at indfri. Dette vil sige, at låntager reelt skal betale 100 + omkostningerne for at slippe ud af lånet før tiden. Sættes denne omkostning, som angivet i arket, til 1 vil det i nogle tilfælde forsinke eller helt eliminere førtidsindfrielse, da renten skal falde mere, for at det kan betale sig at indfri. Herved kommer den effektive rente på RKOen tættere på statsobligationens. Og vi ser at omkostningerne ved at indfri kan forklare, at man observerer kurser på RKOer, som er over 100.

I praksis er beregning af priser på RKOer et vanskeligt problem, fordi den adfærd husejere rent faktisk udviser ikke lader sig forklare som løsningen til et simpelt optimeringsproblem. Dels har alle jo ikke samme modeller for renten, og dels (og nok mere rammende) har folk varierende grad af interesse i problemet og sidder derfor slet ikke og regner på problemet. Men princippet bag de beregninger, som pengeinstitutterne baserer deres anbefalinger på, er ganske godt illustreret i ovenstående model:

u	1,12		Kort rente		Effektiv				Hovedstol
d	0,9		RKO med omk.		5,11%				
q	0,5		RKO		5,25%				
Kort rente, T=0	5,00%		Stat		5,07%				
Kupon i %	5						98,11	7,87%	100,00
Omkostning	1						98,11		
					97,63	7,02%	98,11		
					97,63				
			98,25	6,27%	97,63		99,39	6,32%	100,00
			98,15				99,39		
	99,60	5,60%	98,25		99,88	5,64%	99,39		
	99,12				99,67				
5,00%	99,77		100,90	5,04%	99,88		100,44	5,08%	100,00
			100,00				100,00		
		4,50%	101,26		101,00	4,54%	100,44		
					100,00				
				4,05%	101,75		101,00	4,08%	100,00
							100,00		
						3,65%	101,31		
								3,28%	100,00
T=0		T=1		T=2		T=3		T=4	