Matematik 2AN

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 3 sider. Det er dækkende for både nyt og gammelt pensum.

Opgave 1 .

Betragt problemet

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(x,\pi) = 0, & 0 \le x \le \pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, & 0 \le y \le \pi \end{cases} \\ u(x,0) = \sin^3 x, \qquad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

a) Gør rede for at problemet har en kontinuert løsning på $[0,\pi] \times [0,\pi]$.

b) Bestem denne løsning.

c) Lad $g(x) = u(x, \frac{\pi}{2})$. Bestem for hvert $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \, dx.$$

Opgave 2 .

Lad $C([0,1],\mathbb{C})$ betegne banachrummet af kontinuerte komplekse funktioner på intervallet $[0,1]$ med normen $\|f\|_u = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$.

Lad endvidere $\Delta = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x \ne y\}$.

Betragt for hvert $(x,y) \in \Delta$ afbildningen $\Phi_{x,y} : C([0,1],\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\Phi_{x,y}(f) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

a) Gør rede for at en funktion $f \in C([0,1],\mathbb{C})$ er en lipschitzafbildning med lipschitzkonstant $C > 0$, hvis og kun hvis

$$|\Phi_{x,y}(f)| \le C$$

 Opgave 2 fortsættes på side 2

for alle afbildningerne $\Phi_{x,y}$, $((x,y) \in \Delta)$, altså hvis og kun hvis

$$f \in \bigcap_{(x,y)\in\Delta} \{g \mid |\Phi_{x,y}(g)| \leq C\}.$$

b) Vis uligheden

$$|\Phi_{x,y}(f) - \Phi_{x,y}(g)| \leq \frac{2}{|x-y|}\|f-g\|_u,$$

gældende for alle $(x,y) \in \Delta$ og alle $f, g \in C([0,1], \mathbb{C})$, og gør rede for at enhver afbildning $\Phi_{x,y}$, $((x,y) \in \Delta)$ er kontinuert.

c) Vis ved brug af b), at

$$\{f \in C([0,1],\mathbb{C}) \mid |\Phi_{x,y}(f)| \leq C\}$$

er afsluttet for ethvert $C > 0$ og ethvert $(x,y) \in \Delta$.

d) Vis ved brug af a) og c), at for ethvert $C > 0$ er mængden

$$\{f \in C([0,1],\mathbb{C}) \mid f \text{ er en lipschitzafbildning med lipschitzkonstant } C\}$$

afsluttet i $C([0,1],\mathbb{C})$.

Opgave 3 .

Lad H betegne hilbertrummet $L_2([-\pi,\pi], \frac{1}{2\pi})$ og lad $e_n(x) = e^{\mathrm{inx}}$, $(x \in [-\pi,\pi],\ n \in \mathbb{Z})$ være den sædvanlige ortonormalbasis.

Lad

$$H_{ev} = \{f \in H \mid (f, e_n) = (f, e_{-n}) \text{ for alle } n = 0,1,2,\dots\}$$

og

$$H_{od} = \{f \in H \mid (f, e_n) = -(f, e_{-n}) \text{ for alle } n = 0,1,2,\dots\}.$$

a) Gør rede for, at

$$e_n + e_{-n} \in H_{ev}$$

og

$$e_n - e_{-n} \in H_{od}$$

for alle $n = 0,1,2,\dots$.

b) Lad $f \in H_{ev}$ og $g \in H_{od}$.

Opgave 3 fortsættes på side 3

Vis, at

$$f = (f, e_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} (f, e_n)(e_n + e_{-n})$$

og

$$g = \sum_{n \in \mathbb{N}} (g, e_n)(e_n - e_{-n}).$$

c) Vis, at

$$H_{ev} \subseteq H_{od}^{\perp}$$

og

$$H_{od} \subseteq H_{ev}^{\perp}.$$

d) Bestem ortogonalprojektionen af funktionen $\sin x + \sin^2 x$ på H_{ev}.