Matematik 2 AN

3 timers skriftlig prøve. Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (40 points)

Lad X være en mængde og lad (M, d) være et metrisk rum. Lad endvidere $\varphi: X \to M$ være en injektiv afbildning.

a) Vis at der ved
$$\tilde{d}(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)), \quad x, y \in X$$
defineres en metrik på X.

b) Gør rede for at $\varphi: X \to M$ er en isometri fra det metriske rum $(X, \tilde{d})$ til det metriske rum (M, d).

Betragt nu følgende konkrete tilfælde:
$$X = [0, 2\pi[\text{ og } M = \mathbb{R}^2$$
med d den sædvanlige euklidiske afstand på $\mathbb{R}^2$. Lad endvidere $\varphi: X \to M$ være afbildningen
$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi[\ .$$

c) Gør rede for at $\varphi(X)$ er kompakt i (M, d).

d) Gør rede for at $(X, \tilde{d})$ er et kompakt metrisk rum.

I X betragtes nu følgen $x_n = 2\pi - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

e) Vis at
$$\tilde{d}(x_n, x_m) \leq \sqrt{2}\,|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|\ .$$

f) Vis, f.eks. ved benyttelse af e), at (x_n) er en cauchyfølge i $(X, \tilde{d})$.

g) Gør rede for at (x_n) er konvergent i $(X, \tilde{d})$, og bestem grænseværdien.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2 (20 points)

a) Gør rede for at der ved integraludtrykket

$$F(x) = \int_0^1 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dt$$

defineres en funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Gør rede for at F er differentiabel på $\mathbb{R}$, og bestem et lignende integraludtryk for $F'(x)$.

c) Beregn $F'(0)$.

Opgave 3 (40 points)

Lad $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Gør rede for at $f \in \mathcal{C}_{st}$, og beregn fourierkoefficienterne $c_0(f)$, $c_{-1}(f)$ og $c_1(f)$.

b) Vis at fourierrækken for f er uniformt konvergent.

De øvrige fourierkoefficienter oplyses at være

$$c_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{1-n^2} & \text{for } n \text{ lige} \\ 0 & \text{for } n \text{ ulige}, n \neq \pm 1. \end{cases}$$

c) Vis at

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}\cos 2kx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

d) Vis herved at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Betragt nu den ledvist differentierede række

$$-\frac{1}{2}\sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx.$$

e) Gør rede for at rækken er konvergent i L_2, men ikke er uniformt konvergent.