

Matematik 2AN — 31. maj 2002

3 timers skriftlig prøve. Alle hjælpemidler er tilladte.

*Opgavesættet består af 9 opgaver og er på 2 sider. Opgaverne er vægtet med pointtal, og summen af pointtal er **200**.*

Opgave 1 (40 point). Afgør om nedenstående påstande er sande eller falske. Giv et kort argument i hvert tilfælde, gerne i form af en reference til lærebøgerne.

- (i) Hvis $f: X \rightarrow Y$ er en kontinuert afbildning mellem metriske rum X og Y , og hvis $K \subseteq X$ er kompakt, så er $f(K)$ kompakt.
- (ii) Hvis $f: X \rightarrow Y$ er en kontinuert afbildning mellem metriske rum X og Y , og hvis $K \subseteq Y$ er kompakt, så er $f^{-1}(K)$ kompakt.
- (iii) Hvis $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert og differentiabel, og hvis f' er begrænset, så er f uniformt kontinuert.
- (iv) Vektorrummet $C([0, 1], \mathbb{C})$ udstyret med det indre produkt $(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ er et Hilbertrum.
- (v) Hvis Fourierrækken for en funktion f konvergerer uniformt mod f , så er f kontinuert og 2π -periodisk.
- (vi) Hvis d_1 er den diskrete metrik på en mængde X , og hvis d er den sædvanlige metrik på $\mathbb{R}$ (givet ved $d(x, y) = |x - y|$), så er enhver afbildning $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuert.
- (vii) Enhver kontinuert funktion $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kan udvides til en kontinuert funktion $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
- (viii) Hvis d_1 og d_2 er to metrikker på samme endelig dimensionale vektorrum, så er d_1 og d_2 nødvendigvis ækvivalente.

Opgave 2 (20 point). Lad M være delmængden af $\mathbb{R}$ givet ved

$$M =]-\infty, 0[\cup \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

og lad M være udstyret med den sædvanlige metrik $d(x, y) = |x - y|$ nedarvet fra $\mathbb{R}$. Betragt delmængden $A =]-1, 0[\cup \{2, 4, 6\}$ af M .

Bestem afslutningen, $\overline{A}$, og det indre, A° , af A relativt til M .

Opgave 3 (20 point). Vis at mængden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \in]-1, 1[\}$$

er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$ (når $\mathbb{R}^2$ udstyres med den sædvanlige Euklidiske metrik). Er A begrænset?

Opgave 4 (25 point). Betragt funktionen $f: [-\pi, \pi]$ givet ved $f(x) = x^2$.

- (i) Bestem Fourierkoefficienten $c_0(f)$.
- (ii) Gør rede for, at Fourierrækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$ for f konvergerer uniformt mod f på intervallet $[-\pi, \pi]$.
- (iii) Vis at $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) = 0$ og at $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n c_n(f) = \pi^2$.

Opgave 5 (20 point). Lad $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ være en ortonormal basis for et Hilbertrum H . Sæt $f_n = (e_{2n-1} + e_{2n})/\sqrt{2}$.

- (i) Gør rede for, at $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ er et ortonormalt sæt i H .
- (ii) Bestem $\sum_{n=1}^{\infty} |(e_1, f_n)|^2$. Benyt svaret til at konkludere, at $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *ikke* er en ortonormal *basis* for H .

Opgave 6 (25 point). Vis at der findes én og kun én kontinuert funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ som opfylder

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f(x^2) \text{ for alle } x \in [0, 1].$$

[Vink: Betragt afbildningen $T: C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ givet ved $T(g)(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}g(x^2)$, hvor $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ og $x \in [0, 1]$.]

Opgave 7 (15 point). Gør rede for, at differentiaalligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = |t|x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -|t|x_1,$$

har netop én maksimal løsning, som opfylder $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$.

Opgave 8 (15 point). Gør rede for, at hvis $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ opfylder $(1 + x^4)f(x) = e^{-x^2}$, og hvis $g = \mathcal{F}(f)$ er den Fouriertransformerede af f , så gælder

$$g(k) + g^{(4)}(k) = e^{-k^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Opgave 9 (20 point). Vis (f.eks. ved direkte udregning), at der gælder

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)g(x) dx$$

for alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, hvor $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ og $\widehat{g} = \mathcal{F}(g)$ er de Fouriertransformerede af f , hhv., g .