Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1998

Matematik 2 AN

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1

Lad $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ være en kontinuert differentiabel funktion, hvis afledede f' er positiv og aftagende, dvs.

$$\begin{aligned} 0 < f'(t)\,, &\quad t \geq 0\,, \\ f'(s) \leq f'(t)\,, &\quad 0 \leq t \leq s\,. \end{aligned}$$

Antag videre, at $f(0) = 0$.

a) Vis, at der ved fastsættelsen

$$d_f(x,y) = f(|x-y|)\,, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

defineres en metrik i $\mathbb{R}$.

Vink: Vis først, at $f(|x-y|) \leq f(|x-z| + |z-y|)$. Udnyt dernæst, at $f(t) = \int_0^t f'(s)\,ds\,, \quad t \geq 0\,.$

Vi definerer nu funktionen $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$H(x) = x^3\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

b) Vis, at $H : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_f)$ er kontinuert, hvor d betegner den sædvanlige metrik i $\mathbb{R}$.

c) Vis, at $H : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_f)$ ikke er uniformt kontinuert.

Opgave 2

Vi betragter de to Hilbertrum $H_1 = L_2([0,\pi])$ og $H_2 = l_2(\mathbb{N})$ med sædvanligt indre produkt. Vi betragter ortonormalbasen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for H_1 givet ved

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx\,, \quad x \in [0,\pi]\,,$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

og den naturlige ortonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for H_2.
Lad to begrænsede lineære operatorer $U, V : H_1 \to H_2$ være fastlagt ved

$$U f_n = e_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$
$$V f_n = e_{2n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Gør rede for, at U er unitær og at V ikke er unitær.

b) Lad $f(x) = \sin^3 x$. Bestem de to vektorer Uf og Vf.

c) Vis, at

$$V^* e_k = \begin{cases} 0\,, & k \text{ ulige} \\ f_{k/2}\,, & k \text{ lige.} \end{cases}$$

Opgave 3

a) Begrund, at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{in\theta}$$

konvergerer uniformt på hele den reelle akse og at

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{in\theta}$$

er en kontinuert, periodisk funktion med periode 2π.

b) Vi betragter nu Dirichlet problemet i cirkelskiven $\Omega_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, med randbetingelse

$$u(1,\theta) = g(\theta)\,,$$

hvor g er funktionen givet i a). Opskriv en løsning $u(r,\theta)$ til dette problem.

c) Lad nu $r \in [0,1]$ være fast. Vis, at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(r,\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} 4^{-n}\,,$$

hvor $u(r,\theta)$ betegner løsningen til problemet i b).

d) Vis, at

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega_1} |u(x,y)|^2 dx\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}/(2n+2)\,.$$

Vink: Man kan bruge formlen

$$\iint_{\Omega_1} |u(x,y)|^2 dx\,dy = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |u(r,\theta)|^2 r\,d\theta\,dr$$

(som ikke kræves bevist). Dernæst kan man bruge resultatet fra c) og argumentere for, at den opnåede række kan integreres ledvist.