Matematik 2 AN

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (30 points)

Lad $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ og lad $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, \infty)$ være funktionen

$$d(x, y) = |2^{-x} - 2^{-y}| \qquad (x, y \in \mathbb{N}).$$

a) Vis, at d er en metrik på $\mathbb{N}$.

b) Betragt følgen $x_n = n^2$ i $\mathbb{N}$. Vis, at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en cauchyfølge i $(\mathbb{N}, d)$, og gør rede for, at den ikke er konvergent.

Lad $x \in \mathbb{N}, r > 0$ og lad som sædvanlig $K(x, r)$ betegne den åbne kugle

$$K(x, r) = \{y \in \mathbb{N} \mid d(x, y) < r\}.$$

c) Vis, at for ethvert $x \in \mathbb{N}$ gælder

$$K(x, 2^{-(x+1)}) = \{x\}.$$

d) Vis, at enhver delmængde $A \subseteq \mathbb{N}$ er åben m.h.t. metrikken d.

Opgave 2 (30 points)

Lad H være et uendeligdimensionalt hilbertrum og lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis.
Ved

$$X = \overline{\text{span}}\{e_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

og

$$Y = \overline{\text{span}}\{e_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

defineres to afsluttede underrum af H.

a) Gør rede for at ved

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/4} e_n$$

 Opgave 2 fortsættes på side 2

defineres en vektor i H og bestem projektionen af x på X.

b) Vis, at

$$X \subseteq Y^{\perp} \text{ og } Y \subseteq X^{\perp}.$$

c) Gør rede for at enhver vektor $x \in H$ på entydig måde kan skrives på formen

$$x = h + k,$$

hvor $h \in X$ og $k \in Y$.

d) Gør dernæst rede for at $X = Y^{\perp}$ og $Y = X^{\perp}$.

Opgave 3 (40 points)

Lad $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + |\sin x|)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Skitsér grafen for f i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$, og beregn fourierkoefficienterne $c_{-1}(f)$ og $c_1(f)$.

b) Vis, at fourierrækken for f er uniformt konvergent.

De øvrige fourierkoefficienter oplyses at være

$$c_n(f) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & \text{for } n \text{ lige} \\ 0 & \text{for } n \text{ ulige}, n \neq \pm 1. \end{cases}$$

c) Vis, at

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

d) Vis herved at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Betragt nu den ledvist differentierede række

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx.$$

e) Gør rede for at rækken er konvergent i hilbertrummet $L_2[-\pi, \pi]$, men ikke er uniformt konvergent.