Matematik 2 AN

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer.

Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (25 points).

Lad $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ være stykkevis kontinuert og definér

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Det oplyses at dersom f yderligere opfylder $f \in C^2([0, \pi])$ og $f(0) = f(\pi) = 0$, så gælder

$$(*) \qquad b_n(f) = -\frac{1}{n^2} b_n(f'') \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Lad nu $f(x) = x(x - \pi)$, $\quad x \in [0, \pi]$.

(i) Beregn ved hjælp af ovenstående oplysning $(*)$ koefficienterne $b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Opskriv sinusrækken for f.
(iii) Gør rede for at sinusrækken for f er uniformt konvergent med sum f.
(iv) Vis formlen

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k + 1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

Opgave 2 (30 points).

Lad d betegne den sædvanlige metrik på $\mathbb{R}$ og lad $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Vi definerer afbildningen $\widetilde{d} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to [0, \infty[$ ved

$$\widetilde{d}(x, y) = |\log x - \log y| \quad x, y \in \mathbb{R}_+ .$$

(i) Vis at $\widetilde{d}$ er en metrik på $\mathbb{R}_+$.
(ii) Gør rede for at for ethvert $a > 0$ og $r > 0$ er kuglen

$$K_{\widetilde{d}}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \widetilde{d}(a, x) < r\}$$

et åbent interval, og angiv dets endepunkter.
(iii) Vis at afbildningen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ er en isometri af $(\mathbb{R}, d)$ på $(\mathbb{R}_+, \widetilde{d})$.
(iv) Gør rede for at $(\mathbb{R}_+, \widetilde{d})$ er fuldstændigt.
(v) Vis at d og $\widetilde{d}$ er ækvivalente metrikker på $\mathbb{R}_+$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (20 points).

(i) Gør rede for at der ved udtrykket

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx^4} \sin x \, dx \,, \quad t > 0$$

defineres en funktion $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

(ii) Vis at F er differentiabel på ethvert begrænset åbent interval $(a, b) \subseteq (0, \infty)$, og find et tilsvarende udtryk for $F'(t)$.

Opgave 4 (25 points).

Lad $M = [0,1] \times [0,1]$ betragtet som metrisk delrum af $\mathbb{R}^2$ udstyret med normen

$$\|(x, y)\|_\infty = \text{maks}\,\{|x|, |y|\}\,.$$

Ved forskriften

$$T(x, y) = \left(e^{-\frac{1}{4}xy}\,,\ \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

defineres en afbildning $T : M \to M$. Det oplyses at denne afbildning er en lipschitzafbildning med lipschitzkonstant $C < 1$.

(i) Vis at ligningssystemet

$$\begin{cases} e^{-\frac{1}{4}xy} = x \\ \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = y \end{cases}$$

har præcis én løsning $(x, y) \in M$.

Løsningen ønskes ikke bestemt.

Det oplyses at for alle $s, t \in [0, 1]$ gælder

$$|\cos(s) - \cos(t)| \leq (\sin 1)|s - t|$$
$$\left|e^{-s} - e^{-t}\right| \leq |s - t|\,.$$

(ii) Vis, jf. ovennævnte påstand, at T er en lipschitzafbildning med lipschitzkonstant $C = \text{maks}\,\{\frac{1}{2}, \sin 1\}$.