Matematik 2 AN

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 3 sider.

Opgave 1

Lad M være et metrisk rum og lad $C_b(M,\mathbb{R})$ betegne det normerede vektorrum bestående af begrænsede kontinuerte reelle funktioner på M udstyret med den uniforme norm $\|\cdot\|_u$.

For givet $x_0 \in M$ defineres afbildningerne S_{x_0} og T_{x_0} fra $C_b(M,\mathbb{R})$ ind i $\mathbb{R}$ ved

$$S_{x_0}(f) = f(x_0)\,,\ T_{x_0}(f) = (f(x_0))^2\,,\ f \in C_b(M,\mathbb{R})\,.$$

a) Vis, at S_{x_0} og T_{x_0} er kontinuerte.

b) Lad a og b være reelle tal og lad $x_1, x_2 \in M$.
Vis, at

$$\{f \in C_b(M,\mathbb{R}) \mid f(x_1) < a\,,\quad (f(x_2))^2 > b\}$$

er en åben delmængde af $C_b(M,\mathbb{R})$, og at

$$\{f \in C_b(M,\mathbb{R}) \mid f(x_1) \le a\,,\quad (f(x_2))^2 \ge b\}$$

er en afsluttet delmængde af $C_b(M,\mathbb{R})$.

c) Vis, for givet $x_0 \in M$, at S_{x_0} er uniformt kontinuert, og at T_{x_0} ikke er uniformt kontinuert.

Opgave 2

Lad H betegne Hilbert rummet $L_2([0,\pi])$ med indre produkt givet ved

$$(f,g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}\,dx\,,\quad f,g \in H\,,$$

og lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ være ortonormalbasen for H givet ved $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, e_n(x) = \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,\pi]$.

a) For givet $a \in \mathbb{C}$ skal det vises, at rækken

 Opgave 2 fortsættes på side 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n e_n$$

er konvergent i H netop hvis $|a| < 1$. Beregn, for $|a| < 1$, normen af rækkens sum.

b) Vi definerer en lineær operator A på H ved

$$Af = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{3}n}(f, e_n)e_n \,, \quad f \in H \,.$$

Bestem samtlige egenværdier for A og angiv ortonormalbaser for de tilhørende egenrum.

c) Afgør, hvorvidt A er selvadjungeret, henholdsvis unitær.

d) Beregn $(I + A^3)g$, hvor $g \in H$ er givet ved

$$g(x) = 1 - \cos 2x \,, \quad x \in [0, \pi] \,,$$

og I betegner identitetsoperatoren på H, (og hvor $A^3 = AAA$).

Opgave 3

Lad f være den periodiske funktion på $\mathbb{R}$ med periode 2π, der er defineret ved

$$f(\theta) = \sin \frac{1}{2}\theta \,, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \,.$$

a) Bestem Fourier rækken for f.

b) Vis, at Fourier rækken for f er uniformt konvergent på $\mathbb{R}$ og bestem rækkens sum for $\theta = \frac{5\pi}{2}$.

c) Bestem Fourier rækken for den periodiske funktion g på $\mathbb{R}$ med periode 2π, som er givet ved at $g(\theta) = f'(\theta)$ for $0 < \theta < 2\pi$ og $g(0) = \frac{1}{2}$.

d) Vis, at Fourier rækken for g er punktvis konvergent men ikke uniformt konvergent på $\mathbb{R}$, og find rækkens sum for $\theta = 0$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 4

a) Bestem sinus-rækken for funktionen

$$f(x) = x \sin \pi x\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

b) Vis, at sinus-rækken for f er uniformt konvergent på $[0,1]$.

c) Bestem en rækkefremstilling af løsningen til følgende Dirichlet problem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1\,, \\ u(x,1) = 0\,, \quad 0 \le x \le 1\,, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0\,, \quad 0 < y < 1\,. \\ u(x,0) = x \sin \pi x\,, \quad 0 \le x \le 1\,, \end{cases} .$$

Gør rede for, at denne række er uniformt konvergent på $[0,1] \times [0,1]$.