

Matematik 2 AN

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregner.)

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være to metriske rum og $f : X \rightarrow Y$ en kontinuert afbildning.

- Vis, at hvis $x \in X$ er fortætningspunkt for følgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i X , da er $f(x)$ fortætningspunkt for følgen $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ i Y .
- Vis, at hvis $x \in X$ er fortætningspunkt for følgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i X , da er (x, x) fortætningspunkt for følgen $((x_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ i produktrummet $X \times X$.
- Lad $X = Y = \mathbb{R}$ udstyret med sædvanlig metrik og lad talfølgerne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være givet ved

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{hvis } n \text{ er lige} \\ 0, & \text{hvis } n \text{ er ulige,} \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} n, & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ 0, & \text{hvis } n \text{ er lige.} \end{cases}$$

Eftersis, at hver af følgerne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ har et fortætningspunkt, men at følgen $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ i $\mathbb{R}^2$ ikke har noget fortætningspunkt.

Opgave 2

Lad H betegne Hilbert rummet $L_2([0, \pi])$ med indre produkt givet ved

$$(f, g) = \int_0^\pi f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in H.$$

Lad endvidere $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ betegne ortonormalbasen for H givet ved $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, $x \in [0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

- Bestem konstanterne $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, således at størrelsen

$$\int_0^\pi |a_1 \sin x + a_2 \sin 2x - \cos x|^2 dx$$

er mindst mulig.

- Vis, at der findes en entydigt bestemt unitær operator $U \in \mathcal{B}(H)$, således at

$$Ue_n = \begin{cases} e_{n+1}, & \text{hvis } n \text{ er ulige.} \\ -e_{n-1}, & \text{hvis } n \text{ er lige.} \end{cases}$$

- Vis, at $U^2 = -I_H$, og bestem U^* .
- Beregn funktionen $g = Uf$, hvor $f \in H$ er givet ved $f(x) = (\sin x)^3$, $x \in [0, \pi]$.

Opgave 3

Lad funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi} \right] - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

hvor vi med $[a]$ betegner det største hele tal, som er mindre end eller lig med a , for $a \in \mathbb{R}$.

- Vis, at f er stykkevis glat og periodisk med periode 2π , og skitsér dens graf i intervallet $[-4\pi, 4\pi]$.
- Beregn de trigonometriske Fourier koefficienter og opstil Fourier rækken for f .
- Vis, at Fourier rækken for f er punktvis konvergent i $\mathbb{R}$, og afgør, hvorvidt den er uniformt konvergent.

Lad $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π , der er givet ved

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{for } x \in [0, 2\pi[.$$

- Bestem den trigonometriske Fourier række for g og vis, at den er uniformt konvergent i $\mathbb{R}$ med g som sumfunktion.

Opgave 4

Vi betragter problemet

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

- Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sin n\pi x$$

er uniformt konvergent i $\mathbb{R}$ og at sumfunktionen f er kontinuert samt at $f(0) = f(1) = 0$.

Det oplyses (og skal altså ikke vises), at f ydermere er stykkevis glat.

- Angiv en løsning til $(*)$ på rækkeform, som opfylder $u(x, 0) = f(x)$ for $x \in [0, 1]$.
- Begrund, at ovennævnte løsning u har en størsteværdi på rektanglet $[0, 1] \times [0, T]$ for ethvert $T > 0$.
- Vis, at der findes en konstant $K > 0$, således at

$$|u(x, t)| \leq K e^{-\pi^2 T} \quad \text{for } x \in [0, 1] \text{ og } t \geq T,$$

og benyt dette til at vise, at løsningen u har en størsteværdi på strimlen $[0, 1] \times [0, +\infty[$.