

Matematik 2 AN

(nyt og gammelt pensum)

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregner.)

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (30 points).

Lad M være delmængden af $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$M = \{(x, \frac{1}{n}) \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}.$$

M består altså af en forening af visse rette linier som er parallelle med x -aksen. Vi udstyrer $\mathbb{R}^2$ med sin sædvanlige metrik.

a) Vis at ethvert punkt $(x, 0)$ på x -aksen tilhører M 's afslutning $\overline{M}$.

Det oplyses at $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}$.

b) Benyt dette til at vise, eller vis på anden måde, at

$$\overline{M} = M \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Vi betragter nu $\overline{M}$ som metrisk delrum af $\mathbb{R}^2$.

c) Gør rede for at enhver cauchyfølge i $\overline{M}$ er konvergent i $\overline{M}$.

d) Vis at M er en åben, overalt tæt delmængde af $\overline{M}$ med hensyn til delrumsmetrikken.

Opgave 2 (20 points).

Lad M være mængden $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ betragtet som metrisk delrum af $(\mathbb{R}^2, d)$, hvor d er den sædvanlige metrik.

a) Gør rede for at M er kompakt.

Betragt funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

b) Vis at f er kontinuert.

c) Gør rede for at der findes $\delta > 0$ således at for alle (x_1, y_1) og (x_2, y_2) i M gælder $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{1}{10000}$, når blot $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta$.

Opgave 3 (20 points).

Betragt problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = \sin^2(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

- a) Gør rede for at problemet har en kontinuert løsning $u: [0, \pi] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
b) Det oplyses, at

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(x) \sin(nx) dx = \begin{cases} \frac{-8}{\pi} \frac{1}{n(n^2 - 4)} & , \quad \text{for } n \text{ ulige} \\ 0 & , \quad \text{for } n \text{ lige.} \end{cases}$$

Opskriv et rækkeudtryk for løsningen u .

- c) Lad $g(x) = u(x, 1)$ og lad $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx$. Vis at

$$b_n = \begin{cases} \frac{-8}{\pi} \frac{1}{n(n^2 - 4)} e^{-n^2} & , \quad \text{for } n \text{ ulige} \\ 0 & , \quad \text{for } n \text{ lige.} \end{cases}$$

Opgave 4 (30 points).

Lad

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1, & x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[. \end{cases}$$

- a) Gør rede for at fourierrækken for f er punktvis konvergent på $[-\pi, \pi[$.
b) Bestem sumfunktionens værdi for ethvert $x \in [-\pi, \pi[$.
c) Lad $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) e^{-inx} dx$ ($n \in \mathbb{Z}$).
Gør rede for at

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 1.$$

- d) Lad

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Er følgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniformt konvergent? Begrund dit svar.