Fubinis Sætning og Fouriertransformationen — supplerende noter til 2AN

Niels Grønbæk og Mikael Rørdam

Den oprindelige version af disse noter er skrevet af Niels Grønbæk og indgår som §10 i notesættet "Metriske Rum 2". Noterne er revideret december 2001 af Mikael Rørdam bl.a. for at tilpasse dem den version af 2AN, som kører i efteråret 2001. Sidstnævnte bærer ansvaret for eventuelle fejl mv. i forbindelse med revisionen af noterne.

1 Fubinis Sætning

I Appendix A til B. Durhuus': *Hilbertrum med anvendelser* er anført en ret generel sætning om ombytning af integrationsordenen i dobbeltintegraler. Lad os indlede med nogle eksempler til illustration af problematikken.

Eksempel 1.1 Lad $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ være givet ved $f(x,y)=y(x+y^2)$. Integration først efter y giver

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\Big(\int_{[0,1]} y(x+y^2)\,dy\Big)\,dx &= \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{4}y^4\Big]_{y=0}^{y=1}dx \\ &= \int_0^1 \big(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\big)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Integration først efter x giver

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\Big(\int_{[0,1]} y(x+y^2)\,dx\Big)\,dy &= \int_0^1 \Big[y\big(\frac{1}{2}x^2+y^2x\big)\Big]_{x=0}^{x=1}dy \\ &= \int_0^1 \big(\frac{1}{2}y+y^3\big)\,dy \;=\; \frac{1}{2}\,,\end{aligned}$$

så ombytningen af integrationsordenen giver samme resultat. Bemærk at udregningerne undervejs er forskellige.

Eksempel 1.2 Lad $f\colon\ ]0,1]\times]0,1]\to\mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y)=\begin{cases}1/x^2, & 0<y\le x\\ -1/y^2, & 0<x<y\end{cases}\,.$$

Da gælder

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x,y)\,dy &= \int_0^x \frac{1}{x^2}\,dy + \int_x^1 \frac{-1}{y^2}\,dy = \frac{1}{x} + (1-\frac{1}{x}) = 1,\\
\int_0^1 f(x,y)\,dx &= \int_0^y \frac{-1}{y^2}\,dx + \int_y^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{y} - (1-\frac{1}{y}) = -1.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\,dy\big)\,dx = 1, \qquad \int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\,dx\big)\,dy = -1.$$

Man kan altså ikke ombytte integrationsordenen uden betingelser på integranden.

Vi skal ikke her formulere det mest generelle udsagn om hvornår ombytning er i orden, men nøjes med at betragte kontinuerte integrander. (Sætningen nedenfor gælder mere generelt for alle Borelfunktioner $f\colon I \times J \to \mathbb{C}$.)

Sætning 1.3 (Fubini) *Lad I og J være intervaller i $\mathbb{R}$ og lad $f\colon I \times J \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Hvis* enten *$f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in I \times J$,* eller

$$\int_I \Big(\int_J |f(x,y)|\,dy\Big)\,dx < \infty, \tag{1.1}$$

da gælder

$$\int_I \Big(\int_J f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_J \Big(\int_I f(x,y)\,dx\Big)\,dy\ . \tag{1.2}$$

Integrationsordenen i de itererede dobbeltintegraler er altså ligegyldig.

Bemærk, at vi kan ombytte integrationsrækkefølgen i (1.1), da $(x,y) \mapsto |f(x,y)|$ er positiv (jvf. sætningens første udsagn).

Det følger specielt af Fubinis sætning, at

$$\int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)\,dy\big)\,dx = \int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy$$

for *enhver* kontinuert funktion $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$, idet (1.1) altid er opfyldt her. (Da $[a,b] \times [c,d]$ er kompakt er f nødvendigvis begrænset, og venstresiden af (1.1) er derfor domineret af $(b-a)(d-c)\|f\|_u < \infty$.)

Bemærk, at $\int_0^1 \big(\int_0^1 |f(x,y)|\,dy\big)\,dx = \infty$, når f er som i Eksempel 1.2.

De to alternative betingelser i Fubinis sætning (f er positiv eller (1.1) er opfyldt) er ækvivalente med, at *planintegralet* $\int_{I\times J} f(x,y)\,dxdy$ er veldefineret. Man kan med andre ord altid ombytte integrationsrækkefølgen, når planintegralet er defineret. Læseren henvises til et kursus i Mål og Integralteori (3MI) for et bevis for Fubinis sætning, og for en udførlig definition af planintegraler.

Vi har også brug for følgende sætning om at differentiere under integraltegnet:

Sætning 1.4 *Lad I og J være delintervaller af $\mathbb{R}$ og lad $f\colon I \times J \to \mathbb{C}$ være en funktion med følgende egenskaber:*

(i) *funktionerne $t \mapsto f(t,x)$ er differentiable for alle $x \in J$,*

(ii) *der findes en kontinuert funktion $g\colon J \to \mathbb{R}^+$, som opfylder*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\Big| \leq g(x) \;\text{ for alle }\; (t,x) \in I \times J, \quad \text{og} \quad \int_J g(x)\,dx < \infty.$$

(iii) *funktionerne $x \mapsto f(t,x)$ og $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ er kontinuerte, og $\int_J |f(t,x)|\,dx < \infty$ for alle $t \in I$.*

Da er funktionen $t \mapsto \int_J f(t,x)\,dx$ veldefineret og differentiabel, og der gælder

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_J f(t,x)\,dx\Big) = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx. \tag{1.3}$$

Denne sætning vises også i 3MI. Beviset benytter Lebesgues sætning om majoriseret konvergens og integralregningens middelværdisætning.

Eksempel 1.5 Lad os her gøre rede for, at

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{1+x^4}\,dx\Big) = -i\int_{\mathbb{R}} \frac{xe^{-itx}}{1+x^4}\,dx. \tag{1.4}$$

Sæt $f(t,x) = e^{-itx}/(1+x^4)$ og lad $I = J = \mathbb{R}$. Da er $t \mapsto f(t,x)$ differentiabel for alle $x \in \mathbb{R}$ og

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{-ixe^{-itx}}{1+x^4}.$$

Sæt $g(x) = |x|/(1+x^4)$. Da er $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx < \infty$ og $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq g(x)$ for alle t og x. Hermed er betingelse (i) og (ii) i Sætning 1.4 opfyldt, og det ses let, at også betingelse (iii) holder. Det følger nu af Sætning 1.4, at (1.3) gælder, og derfor holder (1.4).

2 Fouriertransformationen og Schwartzrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Fouriertransformationen er et eksempel på en grundliggende matematisk idé, nemlig transformation. Første gang du for alvor stødte på denne idé, var sandsynligvis da du hørte om logaritmefunktionen. Den fundamentale ligning

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log y$$

kan opfattes som en transformation af den (relativt) komplicerede operation, multiplikation, til den simplere operation, addition. Et andet eksempel på transformationsidéen er koordinattransformationen, hvor strukturen af en given matrix åbenbares ved at foretage et basisskift. Formålet er at gå fra den givne form til en anden form, der tydeligere afdækker det indhold, man er på jagt efter, 'trans-form' = 'igennem form'. Hvis du kigger tilbage på dit hidtidige liv med matematik, vil du opdage, at mange af de forskellige tiltag kan opfattes som transformationer.

Fouriertransformationens anvendelighed inden for teorien for differentialligninger beror på, at den transformerer den komplicerede proces 'differentiation' til den simplere proces 'multiplikation', således som det udtrykkes i Sætning 2.7 nedenfor.

Vi giver nu definitionen af Fouriertransformationen. Med $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ betegnes mængden af *integrable* funktioner, dvs. mængden af Borelfunktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, som opfylder $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$. Husk at alle kontinuerte og alle stykkevis kontinuerte funktioner er Borelfunktioner. Med integralet her og i det følgende tænker vi primært på Lebesgue integralet. Hvis $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er kontinuert eller stykkevis kontinuert, så er Lebesgue integralet lig med det udvidede Riemann integral:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx, \tag{2.1}$$

hvor integralet på højresiden af (2.1) er det sædvanlige Riemann integral. Konvergensen af grænsen i (2.1) sikres ved antagelsen $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$.

For $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ sættes

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx. \tag{2.2}$$

Definition 2.1 (Fouriertransformationen) Lad $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. *Fouriertransformation* af funktionen f defineres som

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx\ .$$

Vi bruger altså både betegnelsen $\widehat{f}$ og $\mathcal{F}(f)$ for den Fouriertransformerede af f. Sidstnævnte bruges især når vi ønsker at tænke på Fouriertransformationen som en afbilding. (I visse tekster er $\widehat{f}(k)$ defineret til at være $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}\, dx$.) Faktoren $1/\sqrt{2\pi}$ spiller en rolle i Inversionssætningen (Sætning 2.9) og en afgørende rolle i Sætning 2.11 nedenfor.

Linearitet af integralet giver:

$$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g), \qquad \mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}(f), \quad f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Den Fouriertransformerede af et produkt, $\mathcal{F}(f \cdot g)$, er *ikke* lig med produktet af de Fouriertransformerede, $\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$. Istedet gælder $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$, hvor $f * g$ betegner *foldningen* af f og g:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy,$$

et begreb vi ikke skal forfølge yderligere her.

Eksempel 2.2 Lad $a > 0$ og betragt funktionen

$$f_a(x) = \begin{cases} a, & -1/2a \leq x \leq 1/2a, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bemærk, at $f_a \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ og at $\|f_a\|_1 = 1$. For $k \neq 0$ har vi:

$$\begin{aligned} \widehat{f_a}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2a}^{1/2a} a e^{-ikx}\, dx \;=\; \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[(-ik)^{-1} e^{-ikx}\right]_{-1/2a}^{1/2a} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} (-ik)^{-1} \left(e^{-ik/2a} - e^{ik/2a}\right) \;=\; \frac{2a}{\sqrt{2\pi} k} \frac{e^{ik/2a} - e^{-ik/2a}}{2i} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k} \sin(k/2a). \end{aligned}$$

For $k = 0$ er

$$\widehat{f_a}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2a}^{1/2a} a\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Alt ialt får vi:

$$\widehat{f_a}(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k} \sin(k/2a), & k \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & k = 0. \end{cases}$$

Bemærk, at $\widehat{f_a}$ er kontinuert (også i $k = 0$).

Sætning 2.3 *Lad $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Da er $\widehat{f}$ kontinuert og $|\widehat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-1/2} \|f\|_1$ for alle $k \in \mathbb{R}$.*

Bevis: Lad $k \in \mathbb{R}$ og lad $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge i $\mathbb{R}$, som konvergerer imod k. Vi skal vise, at $\widehat{f}(k_n) \to \widehat{f}(k)$ for $n \to \infty$. Hertil benyttes Lebesgues sætning om majoriseret konvergens (med den integrable majorant $g(x) = |f(x)|$):

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \widehat{f}(k_n) &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ik_n x}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} f(x) e^{-ik_n x}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\, dx = \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Sætningens anden påstand ses således:

$$|\widehat{f}(k)| = \Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\, dx\Big| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-ikx}|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1.$$

$\square$

Et mere involveret målteoretisk argument viser, at der videre gælder

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{f}(k) = \lim_{k\to-\infty} \widehat{f}(k) = 0$$

for alle $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

Særligt pænt opfører Fouriertransformationen sig, hvis vi nøjes med at anvende den på en speciel klasse af funktioner, som nu indføres:

Definition 2.4 (Schwarzfunktioner) En funktion f på $\mathbb{R}$ kaldes en *Schwartzfunktion* såfremt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, og der for alle $n, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ findes en konstant $C_{n,N} < \infty$, således at

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{C_{n,N}}{(1+|x|)^N} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

hvor $f^{(n)}$ betegner den n'te afledede af f. Mængden af Schwartzfunktioner betegnes $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Bemærk, at $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ er et vektorrum (over $\mathbb{C}$). Vi bemærker endvidere:

Bemærkning 2.5

(a) Af (2.4) følger

$$|x^N f^{(n)}(x)| \leq (1+|x|)^N |f^{(n)}(x)| \leq C_{n,N} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hvis omvendt $|x^N f^{(n)}(x)|$ er begrænset på $\mathbb{R}$ for alle $n, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fås, eftersom $(1+|x|)^N$ er et polynomium i $|x|$, at også $(1+|x|)^N |f^{(n)}(x)|$ er begrænset på $\mathbb{R}$ for alle $n, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Vi har altså, at $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *netop hvis* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *og* $|x^N f^{(n)}(x)|$ *er begrænset på* $\mathbb{R}$ *for alle* $n, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, hvilket også udtrykker, at $f(x)$ såvel som alle dens afledede aftager hurtigere end enhver potens $|x|^{-N}$ for $|x| \to \infty$.

(b) Da de afledede af $x^N f^{(n)}(x)$ er linearkombinationer af funktioner af samme form, følger det, at $x^N f^{(n)}(x)$ *tilhører* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *hvis* f *tilhører* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(c) Funktionen på højresiden af (2.4) er integrabel over $\mathbb{R}$ hvis $N \geq 2$. Derfor er *enhver Schwartzfunktion samt alle dens afledede indeholdt i* $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

Eksempel 2.6 Funktionen $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ ligger i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dette skyldes, at $x^N \varphi^{(n)}(x) = P(x)e^{-x^2/2}$ for et passende polynomium P (som afhænger af N og n), og

$$\lim_{|x|\to\infty} |P(x)e^{-x^2/2}| = 0$$

for ethvert polynomium P. Specielt er funktionen $x \mapsto P(x)e^{-x^2/2}$ begrænset. Dette viser $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Hvis $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ og hvis f har *kompakt støtte* (dvs. der findes R således at $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$), da vil $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Thi $f^{(n)}$ er begrænset på $[-R, R]$ og dermed på $\mathbb{R}$. Vi kan derfor vælge $C_{n,N} \geq 0$, således at

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{C_{n,N}}{(1+|x|)^N} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R},$$

hvorefter (2.4) er opfyldt.

Det er ikke helt nemt at finde funktioner i $C^\infty(\mathbb{R})$ med kompakt støtte (udover nulfunktionen), men de findes faktisk i rigt mål. De udgør endda en tæt delmængde af $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ mht. $\|\cdot\|_1$. Funktionen f nedenfor har kompakt støtte (den er 0 udenfor $[0,1]$) og den tilhører $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(x-x^2)}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi udleder nu en række egenskaber ved $\mathcal{F}(f)$ i det tilfælde hvor $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sætningen nedenfor siger, at Fouriertransformationen forvandler differentiation til multiplikation med størrelsen ik (hvor k er den frie variabel).

Vi bruger den forkortede betegnelse $x^n f$ for funktionen $x \mapsto x^n f(x)$.

Sætning 2.7 *For $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gælder $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Endvidere haves*

(i) $\mathcal{F}(f^{(n)})(k) = (ik)^n \mathcal{F}(f)(k)$,

(ii) $\mathcal{F}(x^n f)(k) = i^n \mathcal{F}(f)^{(n)}(k)$,

for alle $k \in \mathbb{R}$.

Bevis: Vi bemærker først at $\mathcal{F}(f)$ er begrænset, idet

$$|\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(k)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ikx}|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1$$

for alle $k \in \mathbb{R}$. Da $\left|\frac{\partial}{\partial k}(f(x)e^{-ikx})\right| = \left|-ix\, f(x)e^{-ikx}\right| = |xf(x)|$ og da $xf \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ifølge Bemærkning 2.5 (b) og (c), kan vi anvende sætningen om differentiation under integraltegnet (Sætning 1.4). Vi får derved, at $\mathcal{F}(f)$ er differentiabel med

$$\frac{d}{dk}\mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial k}\big(f(x)e^{-ikx}\big)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -ix\, f(x)e^{-ikx}\, dx = \mathcal{F}(-ixf)(k)$$

idet $xf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ og $\mathcal{F}(-ixf)$ derfor er defineret. Ved gentagen anvendelse af dette, og ihukommende at $x^n f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, fås for alle n, at $\mathcal{F}(f)$ er n gange differentiabel med

$$\frac{d^n}{dk^n}\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}((-ix)^n f) = (-i)^n \mathcal{F}(x^n f).$$

Dette viser (ii). Tilsvarende: Da $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ kan vi anvende $\mathcal{F}$ på f':

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-ikx}\, dx \;=\; \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f'(x) e^{-ikx}\, dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big(\Big[\frac{f(x)e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \Big]_{-R}^{R} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-ikx} dx \Big) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{f(R)e^{-ikR} - f(-R)e^{ikR}}{\sqrt{2\pi}} + ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \;=\; ik\widehat{f}(k)\,.
\end{aligned}$$

Ved gentagen anvendelse fås (i). Ved kombination af (i) og (ii) fås

$$\big| k^m \widehat{f}^{(n)}(k) \big| = \big| \mathcal{F}\big(\frac{d^m}{dx^m} (x^n f) \big)(k) \big| \,,$$

så $k^m \widehat{f}^{(n)}$ er Fouriertransformeret af en Schwartzfunktion og dermed begrænset, dvs. $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\square$

Vi bemærker nedenstående nyttige formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}. \tag{2.5}$$

Formlen vises ved at betragte planintegralet:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dydx &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2}\, dy \Big)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(e^{-x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\, dy \Big)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \;=\; \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \Big)^2.
\end{aligned}$$

Planintegralet ovenfor kan beregnes ved at skifte til polære koordinater $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dydx &= \int_0^{\infty} \Big(\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r\, d\theta \Big)\, dr \;=\; 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\, dr \\
&= 2\pi \big[-e^{-r^2/2} \big]_0^{\infty} \;=\; 2\pi.
\end{aligned}$$

Disse to udregninger tilsammen giver (2.5).

Som en illustration af Fouriertransformationens slagkraft i forbindelse med differentialligninger anføres:

Eksempel 2.8 Lad $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$. Da gælder $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ og $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$. Af Sætning 2.7 fås derfor

$$\widehat{\varphi}'(k) = -i\mathcal{F}(x\,\varphi)(k) = i\mathcal{F}(\varphi')(k) = -k\widehat{\varphi}(k)\ .$$

Da $\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx = 1$, jvf. (2.5), er $\widehat{\varphi}$ løsning til begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dy}{dk} + ky = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Men det er φ også, så af eksistens- og entydighedssætningen fås $\widehat{\varphi} = \varphi$; og φ er altså sin egen Fouriertransformerede!

Vi har ovenfor vist, at $\mathcal{F}$ er en lineær afbildning af $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ind i sig selv. Der gælder faktisk:

Sætning 2.9 (Inversionsformlen) *Lad f være en kontinuert begrænset funktion i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ og antag $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Da gælder*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(k) e^{ikx}\,dk. \tag{2.6}$$

Inversionsformlen gælder for alle $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ (kontinuerte og begrænsede eller ej) som opfylder $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, hvis lighedstegnet i (2.6) opfattes som "lig med næsten overalt". Der gælder nemlig, at hvis $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ og $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, da findes en kontinuert begrænset funktion g så $f(x) = g(x)$ næsten overalt. Med andre ord, integrabilitet af f og af $\widehat{f}$ sikrer, at f er kontinuert og begrænset (på nær en nulmængde).

I beviset nedenfor holder vi os til det mindre generelle resultat formuleret i Sætning 2.9.

Bevis: For at bevise inversionsformlen er det fristende at ombytte integrationsordenen på højresiden af (2.6), men funktionen $k \mapsto e^{ik(x-t)}$ er ikke integrabel over $\mathbb{R}$ for noget x eller t. Vi indfører derfor hjælpefunktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fra Eksempel 2.8. Lebesgues sætning om majoriseret konvergens (med majorant $g(k) = |\widehat{f}(k)|$) giver:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k/n)\widehat{f}(k)e^{ikx}\,dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(k)e^{ikx}\,dk\ . \tag{2.7}$$

Vi regner videre på venstresiden af (2.7):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(k/n)\widehat{f}(k)e^{ikx}\,dk &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(k/n)\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ikt}\,dt\Big)e^{ikx}\,dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(k/n)e^{-ik(t-x)}f(t)\,dt\Big)\,dk \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(k/n)e^{-ik(t-x)}f(t)\,dk\Big)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(k/n)e^{-ik(t-x)}\,dk\Big)\,dt \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} nf(t)\Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(k)e^{-ink(t-x)}\,dk\Big)\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} nf(t)\widehat{\varphi}\big(n(t-x)\big)\,dt \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f\big(x+t/n\big)\widehat{\varphi}(t)\,dt,
\end{aligned}$$

hvor (1) følger af Fubinis sætning (læseren bør overveje, at betingelsen (1.1) er opfyldt), (2) fremkommer ved substitutionen k/n med k, og (3) kommer ved at substituere $n(t-x)$ med t.

Idet f er kontinuert, har vi $f(x+t/n) \to f(x)$ for $n \to \infty$. Ovenstående og (2.7) giver nu:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(k)e^{ikx}\,dk &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(k/n)\widehat{f}(k)e^{ikx}\,dk \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f\big(x+t/n\big)\widehat{\varphi}(t)\,dt \\
&\overset{(4)}{=} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t)\,dt \\
&\overset{(5)}{=} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt \\
&\overset{(6)}{=} f(x),
\end{aligned}$$

hvor (4) skyldes Lebesgues sætning om majoriseret konvergens (med majorant $g(t) = \|f\|_u\widehat{\varphi}(t) = \|f\|_u\varphi(t)$), (5) følger af Eksempel 2.8, og (6) følger af (2.5). □

Korollar 2.10 *Fouriertransformationen $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ er bijektiv. Den inverse Fouriertransformation er givet ved*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(k)e^{ikx}\,dk. \tag{2.8}$$

Den inverse Fouriertransformerede $\mathcal{F}^{-1}(f)$ benævnes af og til $\check{f}$. Bemærk, at (2.8) giver mening for alle $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

Bevis: Det følger umiddelbart af Inversionssætningen (Sætning 2.9), at $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ er injektiv (overvej dette!).

Lad $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, og sæt $g(k) = \widehat{f}(-k)$. Da er $\widehat{f}$ og dermed g Schwartzfunktioner ifølge Sætning 2.7. Inversionsformlen (2.6) anvendt på f giver:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(k) e^{ikx}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-k) e^{-ikx}\, dk = \mathcal{F}(g)(x).$$

Heraf fås, at $\mathcal{F}$ er surjektiv, og at den omvendte afbildning er givet ved

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = g(x) = \widehat{f}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(k) e^{ikx}\, dk.$$

□

Vi slutter dette afsnit med et resultat, som knytter Fouriertransformation an til Hilbertrumsteori. På $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ indføres det sædvanlige indre produkt med tilhørende norm ved

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx\ , \qquad f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

og

$$\|f\|_2 = (f,f)^{1/2} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Sætning 2.11 *Fouriertransformationen bevarer det indre produkt, dvs.* $(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = (f,g)$ *for* $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*. Specielt er* $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ *for* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*, så* $\mathcal{F}$ *er en isometri.*

Bevis: Vi anvender Fubinis sætning og Sætning 2.9 (inversionsformlen):

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(k)\overline{\mathcal{F}(g)(k)}\, dk \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\, dx\Big) \overline{\mathcal{F}(g)(k)}\, dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}(g)(k)} e^{-ikx} f(x)\, dx\Big)\, dk \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}(g)(k)} e^{-ikx} f(x)\, dk\Big)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{F}(g)(k) e^{ikx}\, dk\Big)}\, dx \\
&\overset{\text{Sætning 2.9}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx \ = \ (f,g).
\end{aligned}$$

□

Bemærkning 2.12 Korollar 2.10 og Sætning 2.11 kan anvendes til at udvide Fouriertransformationen til en isometrisk isomorfi af Hilbertrummet $L_2(\mathbb{R})$ på sig selv.

3 Eksempler på anvendelser af Fouriertransformationen.

Vi skal nu se på et par eksempler på anvendelse af Fouriertransformationen til løsning af differentialligninger.

Eksempel 3.1 Betragt den 1-dimensionale Laplaceligning

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + m^2 u = f, \tag{3.1}$$

hvor $m > 0$ er en konstant og f er en given funktion på $\mathbb{R}$. Vi søger en funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, som er to gange differentiabel og som opfylder (3.1). Vi skal her nøjes med at betragte tilfældet $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Det er da nærliggende at søge en løsning $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Hvis en sådan findes, giver Fouriertransformation af ligningen (3.1):

$$(k^2 + m^2)(\mathcal{F}u)(k) = (\mathcal{F}f)(k), \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Definér funktionen $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $\omega(k) = k^2 + m^2$. Vi har så, at (3.2) kan udtrykkes

$$\mathcal{F}(u) = \omega^{-1}\mathcal{F}(f) = (M_{\omega^{-1}}\mathcal{F})(f), \tag{3.3}$$

hvor $M_{\omega^{-1}}$ er *multiplikationsoperatoren* $M_{\omega^{-1}}(f)(k) = \omega^{-1}f(k)$. Operatoren $M_{\omega^{-1}}$ afbilder $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bijektivt på sig selv, idet $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ hvis og kun hvis $\omega\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Vi har hermed godtgjort, at hvis $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ er en løsning til Laplaceligningen, så gælder

$$u = (\mathcal{F}^{-1}M_{\omega^{-1}}\mathcal{F})(f)\ . \tag{3.4}$$

At der ved (3.4) faktisk er givet en løsning kan indses ved at følge ovenstående udledning baglæns (biimplikation!) (Hovsa, hvad er nu det? Laplaceligningen er en lineær differentialligning med konstante koefficienter. Det fremgår af ovenstående, at der kun er én løsning $u = (\mathcal{F}^{-1}M_{\omega^{-1}}\mathcal{F})(f)$. Men det følger fra Mat 1, at der er uendeligt mange løsninger til (3.1) af formen

$$u(x) = ae^{mx} + be^{-mx} + u_0(x), \qquad a, b \in \mathbb{R}\ ,$$

hvor u_0 er en partikulær løsning. Er der ikke en modstrid her?)

Eksempel 3.2 Løs ligningen

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + m^2 u = e^{-x^2/2}. \tag{3.5}$$

Funktionen $x \mapsto e^{-x^2/2}$ er sin egen Fouriertransformerede, jvf. Eksempel 2.8.

Vi får så løsningen $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ givet ved

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k^2 + m^2} e^{-k^2/2} e^{ikx}\, dk\ .$$

Det giver mening at anvende $\mathcal{F}^{-1}M_{\omega^{-1}}\mathcal{F}$ på andre funktioner end Schwartzfunktioner, jvf. Definition 2.1 og (2.8), og man kunne forestille sig at løse ligningen (3.1) for enhver funktion $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, f.eks. $f = 1_{[-a,a]}$ for et $a \in \mathbb{R}_+$, simpelthen ved at sige, at løsningen er $(\mathcal{F}^{-1}M_{\omega^{-1}}\mathcal{F})(f)$.

Lad os prøve at lege lidt med dette eksempel. Bemærk først

$$\mathcal{F}(1_{[-a,a]})(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-ik} \left(e^{-ika} - e^{ika}\right).$$

Heraf fås

$$\mathcal{F}^{-1}M_{\omega^{-1}}\mathcal{F}(1_{[-a,a]})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k^2+m^2} \frac{1}{ik} \left(e^{ika} - e^{-ika}\right) e^{ikx}\,dk\,. \tag{3.6}$$

For kortheds skyld sætter vi $F(x) = \mathcal{F}^{-1}M_{\omega^{-1}}\mathcal{F}(1_{[-a,a]})(x)$. Differentiation under integraltegnet er tilladt her, jvf. Sætning 1.4, og vi får

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k^2+m^2} \left(e^{ika} - e^{-ika}\right) e^{ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \left[\psi(x+a) - \psi(x-a)\right],$$

hvor

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{k^2+m^2}\,dx = \frac{e^{-m|x|}}{2m}\,.$$

Det sidste lighedstegn følger af Opgave 6.5 i **HR**.

Vi betemmer nu en stamfunktion Ψ til ψ:

$$\Psi(x) = \int_0^x \frac{ie^{-m|x|}}{2m}\,dx = \begin{cases} i(e^{mx}-1)/2m^2, & x < 0 \\ -i(e^{-mx}-1)/2m^2, & x \geq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Herved fås

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}[\Psi(x+a) - \Psi(x-a)] + \text{ konstant.} \tag{3.8}$$

Dette udtryk er vores bud på en løsning til (3.1). Ved at gøre prøve ses, at den arbitrære konstant er 0. Bemærk at ved stamfunktionsbestemmelsen (3.7) kan vi tilføje en additiv konstant, som igen forsvinder ved indsættelse i (3.6). Bemærk også, at funktionen Ψ i (3.7) ikke tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, men at løsningsfunktionen (3.8) (med konstant $= 0$) alligevel er integrabel.

Transformationsideén i aktion kan overordnet beskrives således:

- en differentialligning er forelagt;
- overgang til Fouriertransformeret ligning;
- løsning af Fouriertransformeret ligning — en simpel algebraisk opgave;
- den Fouriertransformerede løsning genkendes i 'Den Enormt Store Tabel';
- tabellen læses baglæns.