Om Lebesgue integralet — supplerende noter til 2AN

Mikael Rørdam

Betragt det komplekse vektorrum $C([a,b],\mathbb{C})$ udstyret med det indre produkt:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt, \qquad f,g \in C([a,b],\mathbb{C}) \tag{0.1}$$

og tilhørende norm:

$$\|f\|_2 = \langle f,f\rangle^{1/2} = \Big(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}, \qquad f \in C([a,b],\mathbb{C}). \tag{0.2}$$

(Bemærk, at normen på dette indre produktrum kaldes $\|\cdot\|_2$ istedet for $\|\cdot\|$.) Formålet med disse noter er at beskrive fuldstændiggørelsen af dette indre produktrum. Vi vil herved opnå et *Hilbertrum*, kaldet $L_2([a,b])$. Elementerne i dette Hilbertrum er *ækvivalensklasser* af funktioner $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Funktionerne f er normalt ikke Riemann integrable, men de kan integreres, hvis man benytter et nyt og bedre integrationsbegreb: *Lebesgue integralet.*

Stort set ingen beviser medtages i disse noter. Skulle alle sætninger bevises, ville vi stort set dække hele kurset 3MI: Mål- og Integralteori! Jeg håber ikke desto mindre, at læseren vil opnå en vis indsigt i Lebesgue integralet og hovedideerne bag det.

I disse noter anvendes konventionen $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$, og vi kalder et tal (eller en funktion) positiv hvis det (den) er ≥ 0.

1 Lebesgue integralet

Vi anfører først en nyttig beskrivelse af åbne delmængder af den reelle akse $\mathbb{R}$.

Sætning 1.1 *Enhver ikke-tom åben delmængde U af $\mathbb{R}$ kan skrives på formen*

$$U = \bigcup_{j=1}^{n} \,]a_j, b_j[\quad \textit{eller} \quad U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \,]a_j, b_j[\,, \tag{1.1}$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og hvor intervallerne $]a_j, b_j[$ er parvist disjunkte. (Vi tillader intervaltyper af formen $]-\infty, b[\,$, $]a, \infty[$ og $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$.)

Denne sætning vises mest bekvemt ved at benytte teorien for *sammenhængende* mængder, et begreb, som ikke behandles i 2AN, men som vil blive taget op f.eks. i 3GT.

Det er en konsekvens af Sætning 1.1, at man på en naturlig måde kan definere *længden* $\ell(U)$ af en åben mængde. Først justerer vi terminologien, og betegner længden af U med $m(U)$. Denne defineres ved:

$$m(\emptyset) = 0, \quad m\Big(\bigcup_{j=1}^{n}]a_j, b_j[\Big) = \sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j), \quad m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j[\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j), \tag{1.2}$$

jvf. (1.1). Også her kan $a_j = -\infty$ og $b_i = \infty$ for et enkelt j eller i, og vi benytter konventionen

$$b - (-\infty) = \infty - a = \infty - (-\infty) = \infty.$$

Bemærk, at $m(U)$ er en størrelse beliggende i $[0, \infty]$. F.eks. er

$$m(]0,5[) = 5, \quad m(\mathbb{R}) = \infty, \quad m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}]n, n+2^{-n}[\Big) = 1, \quad m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}]2n, 2n+1[\Big) = \infty.$$

Det kan med lidt tålmodighed vises, at $U \subseteq V$ medfører $m(U) \leq m(V)$.

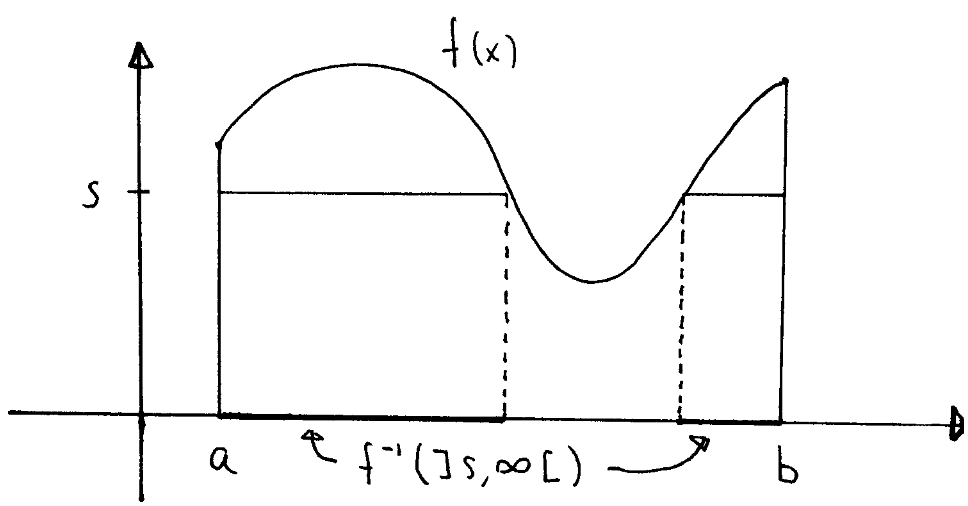
Hvis U er en åben delmængde af et lukket interval $[a, b]$ (altså åben mht. $[a, b]$), da er U igen en endelig eller en tællelig forening af intervaller ligesom i (1.1), men vi må her også medregne intervaller af typen $[a, c[$ og $]c, b]$. Disse to "nye" intervaltyper kan på naturlig måde tildeles en længde ved $m([a, c[) = c - a$ og $m(]c, b]) = b - c$ (når $a < c < b$).

Vi citerer en sætning kendt fra Matematik 1 (Sætning 8.8 i "Funktioner af en og flere variable" af Ebbe Thue Poulsen):

Sætning 1.2 *Enhver aftagende funktion* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *er Riemann integrabel.*

Sætning 1.3 *For enhver kontinuert funktion* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ *gælder*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_0^{\|f\|_u} m\big(f^{-1}(\,]s, \infty[\,)\big)\,ds. \tag{1.3}$$



Halvdelen af arbejdet med at vise denne sætning består i at gøre rede for, at integralet på højresiden overhovedet giver mening: Da $f^{-1}(\,]s,\infty[\,)$ er en åben delmængde af $[a,b]$ er $m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)$ defineret (ved (1.2) og bemærkningen lige over Sætning 1.2), og $m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big) \le m([a,b]) = b-a < \infty$.

Funktionen $s \mapsto m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)$ er aftagende. Dette skyldes, at m er monoton ($U \subseteq V$ medfører $m(U) \le m(V)$), og at $0 \le s \le t$ medfører $f^{-1}(\,]t,\infty[) \subseteq f^{-1}(\,]s,\infty[)$.

Det følger nu af Sætning 1.2 ovenfor, at højresiden af (1.3) er veldefineret. Hvis $s \ge \|f\|_u$, så er $f^{-1}(\,]s,\infty[\,) = \emptyset$. Vi har derfor

$$\int_0^{\|f\|_u} m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)\,ds = \int_0^{\infty} m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)\,ds. \tag{1.4}$$

Mere viser vi ikke af Sætning 1.3. Istedet kigger vi på følgende:

Eksempel 1.4 Betragt funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ givet ved $f(t) = t^n$, hvor $n \in \mathbb{N}$. Venstresiden i (1.3) er da $\int_0^1 t^n\,dt = 1/(n+1)$. For $0 \le s < 1$ er

$$f^{-1}(\,]s,\infty[\,) =]s^{1/n}, 1],$$

og dermed bliver højresiden af (1.3) lig med

$$\int_0^1 m(\,]s^{1/n},1])\,ds = \int_0^1 (1 - s^{1/n})\,ds = 1 - \frac{1}{1+1/n} = 1/(n+1).$$

Kan alle delmængder A af $\mathbb{R}$ tildeles en længde $m(A)$? I givet fald kunne vi med udgangspunkt i højresiden af (1.3) definere integralet af en *vilkårlig* funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$.

Svaret på dette spørgsmål kommer naturligt nok an på hvilke krav vi stiller til længdebegrebet, men det afhænger overraskende nok også af hvilket aksiomsystem vi vælger at lægge til grund! Aktuelt kræves af længdebegrebet, at $m(\,]a,b[\,) = b-a$ for alle åbne intervaller $]a,b[$, og at $m(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)$ når $A_1, A_2, A_3, \ldots$ er en følge af parvist disjunkte delmængder af $\mathbb{R}$. Vælger vi at tro på *udvalgsaksiomet*, så kan det vises, at der findes (meget besynderlige!) delmængder af $\mathbb{R}$, som ikke kan tildeles nogen længde (heller ikke længden 0 eller ∞).

Forehavendet at måle *samtlige* delmængder af $\mathbb{R}$ er således dømt til fiasko. Vi nøjes derfor med at måle *pæne* delmængder af $\mathbb{R}$, de såkaldte *Borelmængder* defineret nedenfor. Stort set alle mængder, der kan beskrives på en lukket form, er "pæne" i denne betydning!

Sætning 1.5 (Borelmængder) *Der findes en mindste familie $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ af delmængder af $\mathbb{R}$, som opfylder:*

(B1) *Alle åbne delmængder af $\mathbb{R}$ tilhører $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.*

(B2) *Hvis A tilhører $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, så vil $\complement A$ også tilhøre $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.*

(B3) *Hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots$ er en følge af mængder i $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, så vil $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ tilhøre $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.*

Sætningen siger bl.a., at hvis $\mathcal{A}$ er en familie af delmængder af $\mathbb{R}$, som indeholder alle åbne delmængder af $\mathbb{R}$, og som er afsluttet under komplementærmængde dannelse, (B2), og tællelig foreninger, (B3), da vil $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$.

Mængderne A, som tilhører $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, kaldes *Borelmængder*. Familien $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ kaldes *Borel σ-algebraen* på $\mathbb{R}$. (Terminologien *σ-algebra* dækker over egenskaberne (B2) og (B3).)

Borel σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ er også afsluttet under følgende operationer (jvf. Opgave 2):

(B4) *Hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots$ er en følge af mængder i $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, så vil $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.*

(B5) *Hvis $A, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, så vil $A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.*

Eksempel 1.6 Følgende delmængder af $\mathbb{R}$ er Borelmængder:

(i) Alle åbne og lukkede mængder.

(ii) Alle åbne mængder relativt til et delinterval I af $\mathbb{R}$.

(iii) Alle endelige mængder.

(iv) Alle tællelige mængder.

(v) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(vi) Alle intervaller.

(vii) Mængden A af alle reelle tal t, hvorom det gælder, at det 5. tal i decimalfremstillingen for t er 7.

Bevis: (i). Hvis $F \subseteq \mathbb{R}$ er lukket, så er $\complement F$ åben. Derfor er $\complement F \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Men så er $F = \complement(\complement F) \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. (iii). Alle endelige mængder er lukkede. (iv). Hvis A er tællelig, så kan A skrives på formen $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Men så er $A = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{a_j\}$. Alle $\{a_j\}$ tilhører $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ ifølge (iii), så $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ ifølge (B3). (v) $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ er tællelige og er derfor Borelmængder ifølge (iv). $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ er komplementærmængden til Borelmængden $\mathbb{Q}$.

(vi). Vi har $]a, b] = [a, b] \setminus \{a\}$, og $[a, b], \{a\} \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ ifølge (i). De øvrige intervaltyper kan klares på en tilsvarende måde.

(ii). Hvis A er åben relativt til et interval I, så er $A = U \cap I$ for en passende åben delmængde U af $\mathbb{R}$. Da I og U tilhører $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ (ifølge (vi) og (i)) vil $A = U \cap I$ tilhøre $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.

(vii). For at vise denne påstand skal man først vise, at A er en tællelig forening af intervaller (ikke helt nemt!), og herefter benytte (vi) og (B3). $\square$

Borelmængdernes “claim to fame” ligger i theoremet nedenfor, som er et af hovedresultaterne i Mål- og integralteori, og i Sætning 1.10.

Theorem 1.7 *Der findes en og kun en funktion* $m\colon \mathbb{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$, *som opfylder*

(m1) $m(\emptyset) = 0$.

(m2) $m(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)$ *for alle følger* $A_1, A_2, A_3, \dots$ *af parvist disjunkte mængder* $A_j \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.

(m3) $m(\,]a,b[\,) = b - a$ *for alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *med* $a < b$.

Funktionen m kaldes *Lebesguemålet* (på $\mathbb{R}$). (En funktion $\mu\colon \mathbb{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$, som opfylder (m1) og (m2) kaldes et *mål* på $\mathbb{R}$.) Man kan forholdvist let vise, at (m1), (m2) og (m3) medfører følgende yderligere egenskaber for Lebesguemålet (Opgave 3):

(m4) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, *hvis* A *og* B *tilhører* $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ *og* $A \cap B = \emptyset$.

(m5) $m(A) \le m(B)$, *hvis* A *og* B *tilhører* $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ *og* $A \subseteq B$.

(m6) $m(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)$ *for enhver følge* $A_1, A_2, A_3, \dots$ *af (ikke nødvendigvis parvist disjunkte) mængder* $A_j \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.

(m7) $m(\,]a,b[\,) = m([a,b[\,) = m(\,]a,b]) = m([a,b]) = b - a$ *for alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *med* $a < b$.

(m8) $m(A) = 0$, *hvis* A *er tællelig (eller endelig).*

Man kan bruge (m2) og (m7) til at vise, at m opfylder (1.2).

Næste punkt på dagsordenen er at definere en klasse af funktioner, som opfører sig pænt mht. Borelmængder.

Definition 1.8 (Borelfunktioner) Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$ (f.eks. $I = \mathbb{R}$ eller $I = [a,b]$). En funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ kaldes en *Borelfunktion* hvis

$$\forall\, s \in \mathbb{R}: \quad f^{-1}(\,]s,\infty[\,) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}). \tag{1.5}$$

En funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ kaldes en Borelfunktion, hvis $\mathrm{Re}(f)$ og $\mathrm{Im}(f)$ begge er Borelfunktioner.

Mængden af Borelfunktioner $f\colon I \to \mathbb{R}$ benævnes $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$, og mængden Borelfunktioner $f\colon I \to \mathbb{C}$ benævnes $\mathcal{B}(I,\mathbb{C})$.

Alle kontinuerte funktioner $f\colon I \to \mathbb{R}$ (hhv. $f\colon I \to \mathbb{C}$) er Borelfunktioner. Thi $f^{-1}(\,]s,\infty[\,)$ er åben (relativt til I) — og dermed en Borelmængde, jvf. Eksempel 1.6 (ii) — for alle $s \in \mathbb{R}$.

Til enhver funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ defineres funktionerne $f_+, f_-\colon I \to \mathbb{R}^+$ ved

$$f_+(t) = \max\{f(t), 0\}, \qquad f_-(t) = \max\{-f(t), 0\}, \quad t \in I.$$

Det ses let, at $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ og at $|f(t)| = f_+(t) + f_-(t)$ for alle $t \in I$.

Lemma 1.9 *Hvis $f\colon I \to \mathbb{R}$ er en Borelfunktion, så er $f_+\colon I \to \mathbb{R}$ og $f_-\colon I \to \mathbb{R}^+$ også Borelfunktioner.*

Klassen af Borelfunktioner har følgende pæne egenskaber (hvor punkt (iii) allerede er bemærket):

Sætning 1.10 *Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$. Mængden $\mathcal{B}(I,\mathbb{C})$ af Borelfunktioner $f\colon I \to \mathbb{C}$ opfylder:*

(i) *Hvis $f, g \in \mathcal{B}(I,\mathbb{C})$ og $\lambda \in \mathbb{C}$, så vil λf, $f+g$ og fg tilhøre $\mathcal{B}(I,\mathbb{C})$.*

(ii) *Hvis $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ er en følge i $\mathcal{B}(I,\mathbb{C})$ og hvis den punktvise grænse $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ findes for alle $t \in I$, da er $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{C})$.*

(iii) $C(I,\mathbb{C}) \subset \mathcal{B}(I,\mathbb{C})$.

Der gælder endvidere, at hvis $\mathcal{A}$ er en klasse af funktioner $f\colon I \to \mathbb{C}$, som opfylder (i), (ii) og (iii) i Sætning 1.10 (med $\mathcal{A}$ istedet for $\mathcal{B}(I,\mathbb{C})$), da vil $\mathcal{B}(I,\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{A}$. Med andre ord, $\mathcal{B}(I,\mathbb{C})$ er den mindste *algebra* af funktioner $f\colon I \to \mathbb{C}$, som indeholder $C(I,\mathbb{C})$, og som er afsluttet under punktvis konvergens. (Egenskab (i) = "algebra", og egenskab (ii) = "afsluttet under punktvis konvergens".)

Med inspiration i Sætning 1.3 og (1.4), og ved at benytte Theorem 1.7 og (1.5), kan vi nu definere Lebesgue integralet.

Til enhver Borelfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ sættes

$$\int_0^\infty m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)\,ds \;=\; \lim_{r\to 0^+}\lim_{R\to\infty}\int_r^R m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)\,ds\,, \tag{1.6}$$

hvis $m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big) < \infty$ for alle $s > 0$. Hvis $m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big) = \infty$ for et eller andet $s > 0$, så så sættes integralet på venstresiden af (1.6) lig med ∞.

Integranden i (1.6) er veldefineret fordi f er en Borelfunktion. Dette sikrer, at $f^{-1}(\,]s,\infty[\,)$ er en Borelmængde for alle $s \geq 0$. Integranden $s \mapsto m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)$ er aftagende, så integralet på højresiden af (1.6) er veldefineret (Sætning 1.2). Grænsen på højresiden af (1.6) findes altid, men den kan være ∞, også selvom $m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big) < \infty$ for alle $s > 0$.

Definition 1.11 (Lebesgue integralet) Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$. Til enhver Borelfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ defineres

$$\int_I f\,dm = \int_0^\infty m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)\,ds\,, \tag{1.7}$$

jvf. (1.6). Sæt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(I,\mathbb{R}) &= \Big\{ f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R}) \;\Big|\; \int_I f_+\,dm < \infty \;\text{ og }\; \int_I f_-\,dm < \infty \Big\}, \\
\mathcal{L}(I,\mathbb{C}) &= \big\{ f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{C}) \mid \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{L}(I,\mathbb{R}) \;\text{ og }\; \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}(I,\mathbb{R}) \big\}.
\end{aligned}$$

For hvert $f \in \mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ defineres

$$\int_I f\,dm = \int_I f_+\,dm - \int_I f_-\,dm, \tag{1.8}$$

og for hvert $f \in \mathcal{L}(I,\mathbb{C})$ defineres

$$\int_I f\,dm = \int_I \mathrm{Re}(f)\,dm + i\int_I \mathrm{Im}(f)\,dm. \tag{1.9}$$

Bemærkninger: Notationen $\int_I f\,dm$ skal opfattes som et samlet symbol, hvor I refererer til det interval, der integreres over, f er den funktion vi integrerer, og m henviser til Lebesguemålet.

Alle positive Borelfunktioner kan integreres (men deres integral kan være ∞). Kun visse ikke-positive reelle og komplekse Borelfunktioner kan integreres, nemlig dem, som tilhører $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ hhv. $\mathcal{L}(I,\mathbb{C})$. Disse funktioner kaldes *integrable*. En reel eller kompleks Borelfunktion f er integrabel hvis og kun hvis $\int_I |f|\,dm < \infty$ (Opgave 5).

Det følger af Sætning 1.3 og af (1.7), at

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \int_a^b f(t)\,dt \tag{1.10}$$

for alle kontinuerte funktioner $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Ved at benytte (1.8), (1.9) og de tilsvarende regler for Riemann integralet indses, at (1.10) gælder for alle $f \in C([a,b],\mathbb{C})$.

Af og til benyttes en af nedenstående notationer for Lebesgue integralet:

$$\int_I f(x)\,dm(x), \qquad \int_a^b f\,dm, \qquad \int_a^b f(x)dx.$$

Lebesgue integralet har følgende egenskaber:

Theorem 1.12 *Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$.*

(i) *Hvis $f,g \in \mathcal{L}(I,\mathbb{C})$ og $\lambda \in \mathbb{C}$, så vil λf og $f+g$ tilhøre $\mathcal{L}(I,\mathbb{C})$, og*

$$\int_I (f+g)\,dm = \int_I f\,dm + \int_I g\,dm, \qquad \int_I \lambda f\,dm = \lambda \int_I f\,dm,$$

(ii) $\left|\int_I f\,dm\right| \le \int_I |f|\,dm$ *for alle $f \in \mathcal{L}(I,\mathbb{C})$.*

(iii) *Lad $(f_n)_{n=1}^\infty$ være en følge i $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ og lad $f\colon I \to \mathbb{R}$. Hvis*

$$\forall\, t \in I: \quad 0 \le f_1(t) \le f_2(t) \le f_3(t) \le \cdots \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t),$$

da er $f \in \mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ og

$$\int_I f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n\,dm.$$

(iv) *Lad* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *være en følge i* $\mathcal{L}(I,\mathbb{C})$ *og lad* $f\colon I \to \mathbb{C}$. *Hvis*

$$\forall\, t \in I: \quad f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t),$$

og hvis der findes en Borelfunktion $g\colon I \to \mathbb{R}^+$, *der opfylder* $|f_n(t)| \le g(t)$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$ *og alle* $t \in I$ *og* $\int_I g\,dm < \infty$, *da er* $f \in \mathcal{L}(I,\mathbb{C})$ *og*

$$\int_I f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n\,dm.$$

Egenskab (i) siger, at $\mathcal{L}(I,\mathbb{C})$ er et vektorrum over $\mathbb{C}$, og at afbildningen $f \mapsto \int_I f\,dm$ er lineær. Egenskab (iii) kaldes *Lebesgues sætning om monoton konvergens*, og (iv) kaldes *Lebesgues sætning om domineret konvergens.*

Eksempel 1.13 Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$. Til enhver delmængde A af I defineres *indikatorfunktionen* $1_A\colon I \to \mathbb{R}$ ved

$$1_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Bemærk, at

$$1_A^{-1}(\,]s,\infty[\,) = \begin{cases} A, & 0 \le s < 1, \\ \emptyset, & s \ge 1. \end{cases}$$

Det ses specielt, at 1_A er en Borelfunktion hvis og kun hvis $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Hvis $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, da bestemmes Lebesgue integralet af 1_A ved (1.7):

$$\int_I 1_A\,dm = \int_0^\infty m\big(1_A^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)\,ds = \int_0^1 m(A)\,ds + \int_1^\infty m(\emptyset)\,ds = m(A).$$

Mere generelt, hvis $A_1, A_2, \ldots, A_n$ er Borelmængder indeholdt i I, som opfylder $m(A_j) < \infty$ for $j = 1, 2 \ldots, n$, og hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, da vil $\sum_{j=1}^n \lambda_j 1_{A_j}$ tilhøre $\mathcal{L}(I,\mathbb{C})$ og

$$\int_I \sum_{j=1}^n \lambda_j 1_{A_j}\,dm = \sum_{j=1}^n \lambda_j m(A_j).$$

Det er almindeligt at *definere* Lebesgue integralet (af positive Borelfunktioner) ved en kombination af ovenstående formel og Lebesgue's Sætning om monoton konvergens (Theorem 1.12 (ii)).

Det bemærkes specielt, at $1_{\mathbb{Q}}$ tilhører $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ og at

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}}\,dm = m(\mathbb{Q}) = 0.$$

Bemærk også, at $1_{\mathbb{Q}}$ ikke er Riemann integrabel, heller ikke betragtet som en funktion på et lukket begrænset interval $[a, b]$. For enhver inddeling D af $[a, b]$ gælder nemlig, at $U(D, 1_{\mathbb{Q}}) \leq 0$ og $O(D, 1_{\mathbb{Q}}) \geq b - a$ (jvf. definitionen af under- og oversummer for Riemann integralet, se f.eks. de supplerende noter om Riemann integralet). Dermed får vi

$$\sup_D U(D, 1_{\mathbb{Q}}) \leq 0 < b - a \leq \inf_D O(D, 1_{\mathbb{Q}}),$$

hvilket viser, at $1_{\mathbb{Q}}$ ikke er Riemann integrabel på $[a, b]$.

2 Nulmængder — næsten overalt

Definition 2.1 (Nulmængder) En delmængde A af $\mathbb{R}$ kaldes en *nulmængde* hvis der findes en Borelmængde B således at $A \subseteq B$ og $m(B) = 0$.

Med andre ord: Alle Borelmængder B, som opfylder $m(B) = 0$, er nulmængder, og alle delmængder af sådanne Borelmængder er nulmængder. En Borelmængde B er en nulmængde hvis og kun hvis $m(B) = 0$. Der findes nulmængder, som ikke er Borelmængder.

Eksempel 2.2 Den tomme mængde $\emptyset$ er en nulmængde. Mere generelt, alle endelige og alle tællelige delmænger af $\mathbb{R}$ er nulmængder (jvf. (m8)). Specielt er $\mathbb{Q}$ en nulmængde. Der findes nulmængder, som ikke er tællelige (f.eks. Cantormængden).

Definition 2.3 (Næsten overalt) Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$ og lad $f, g \colon I \to \mathbb{C}$ være funktioner. Vi siger, at "$f = g$ *næsten overalt*", hvis $\{t \in I \mid f(t) \neq g(t)\}$ er en nulmængde.

Vi skriver også $f \sim g$ hvis $f = g$ næsten overalt. Lad $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ betegne mængden af alle funktioner $f \colon I \to \mathbb{C}$.

Lemma 2.4 *Relationen $\sim$ på $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ er en ækvivalensrelation. Dvs.:*

(i) *$f \sim f$ for alle $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.*

(ii) *$f \sim g$ medfører $g \sim f$ for alle $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.*

(iii) *$f \sim g$ og $g \sim h$ medfører $f \sim h$ for alle $f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.*

Bevis: (i). $\{t \in I \mid f(t) \neq f(t)\} = \emptyset$ er en nulmængde.

(ii). $\{t \in I \mid f(t) \neq g(t)\} = \{t \in I \mid g(t) \neq f(t)\}$, så hvis den første mængde er en nulmængde, da er den anden det også!

(iii). Mængderne $A_1 = \{t \in I \mid f(t) \neq g(t)\}$ og $A_2 = \{t \in I \mid g(t) \neq h(t)\}$ er nulmængder pr. antagelse. Derfor findes Borelmængder B_1 og B_2 så $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_2$ og $m(B_1) = m(B_2) = 0$. Bemærk, at

$$\{t \in I \mid f(t) \neq h(t)\} \subseteq A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2.$$

Nu er $B_1 \cup B_2$ en Borelmængde, og $m(B_1 \cup B_2) \leq m(B_1) + m(B_2) = 0$ ifølge (m6). Dette viser, at $\{t \in I \mid f(t) \neq h(t)\}$ er en nulmængde, og derfor er $f \sim h$. $\square$

Ækvivalensrelationen $\sim$ giver anledning til en *klassedeling* af rummet $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ af funktioner $f\colon I\to\mathbb{C}$. Til hver funktion $f\colon I\to C$ defineres

$$[f]=\{g\in\mathcal{F}(I,\mathbb{C})\mid g\sim f\}. \tag{2.1}$$

Herom gælder:

(c1) $f\in[f]$.

(c2) $[f]=[g] \iff f\sim g$.

(c3) Hvis $f\nsim g$, så er $[f]\cap[g]=\emptyset$.

Mængden $[f]$ kaldes en ækvivalensklasse. Betragt *mængden af ækvivalensklasser*:

$$\mathcal{F}(I,\mathbb{C})/\!\sim \;=\; \{[f]\mid f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{C})\}.$$

Fordelen ved rummet $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})/\!\sim$ er, at to funktioner $f,g\in\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ er *lig med hinanden* i $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})/\!\sim$ hvis og kun hvis $f\sim g$. På den måde kan vi erstatte "$\sim$" med et lighedstegn "$=$" ved at gå fra $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ til $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})/\!\sim$. Det er underforstået, at når man går fra $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ til $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})/\!\sim$, så erstatter man f med ækvivalensklassen $[f]$.

Lemma 2.5 *Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$ og lad $f\colon I\to\mathbb{R}^+$ være en Borelfunktion. Da gælder*

$$\int_I f\,dm=0 \iff f=0 \text{ næsten overalt.}$$

Vi kan let vise "$\Leftarrow$": Antag $f=0$ næsten overalt. Da er $f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\subseteq\{t\in I\mid f(t)\neq 0\}$ og dermed er $f^{-1}(\,]s,\infty[\,)$ en nulmængde for alle $s\geq 0$. Dette viser

$$\int_I f\,dm=\int_0^\infty m\big(f^{-1}(\,]s,\infty[\,)\big)\,ds=\int_0^\infty 0\,ds=0.$$

3 Rummene $\mathcal{L}_2(I)$ og $L_2(I)$

Formålet med disse noter er som sagt at beskrive Hilbertrummet $L_2(I)$ (hvor I er et delinterval af $\mathbb{R}$, f.eks. $I=[a,b]$ eller $I=\mathbb{R}$). Dette er vi nu veludrustede til at gøre:

Definition 3.1 Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$. Definer:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(I) &= \Big\{f\in\mathcal{B}(I,\mathbb{C})\;\Big|\;\int_I|f|^2\,dm<\infty\Big\},\\
L_2(I) &= \mathcal{L}_2(I)/\!\sim \;=\; \{[f]\mid f\in\mathcal{L}_2(I)\},
\end{aligned}$$

hvor $[f]=\{g\in\mathcal{L}_2(I)\mid g\sim f\}$, jvf. (2.1). (Her er $\sim$ en ækvivalensrelation på delrummet $\mathcal{L}_2(I)\subseteq\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$.)

Man vil ofte lidt sjusket tænke på elementer i $L_2(I)$ som værende "funktioner" (snarere end det mere korrekte "ækvivalensklasser af funktioner"), idet man lidt løst identificerer $[f]$ med f. Det skal dog understreges, at man ikke kan tale om *funktionsværdien* af et element i $L_2(I)$ i et givent punkt $t_0 \in I$. Et element i $L_2(I)$ er af formen $[f]$, hvor $f \in \mathcal{L}_2(I)$. Hvis $[f](t_0)$ skulle have nogen mening, så måtte vi kræve, at $f(t_0) = g(t_0)$ for alle $g \in [f]$ (altså at funktionsværdien er uafhængig af den valgte repræsentant for ækvivalensklassen $[f]$). Men sådan er det ikke: Tag et tal $c \neq f(t_0)$ og definer $g\colon I \to \mathbb{C}$ ved

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \neq t_0, \\ c, & t = t_0. \end{cases}$$

Da er $g \in \mathcal{L}_2(I)$ (som man forholdvist let kan tjekke) og $g = f$ næsten overalt. Dermed er $g \in [f]$, men $g(t_0) = c \neq f(t_0)$.

Lemma 3.2 *$\mathcal{L}_2(I)$ er et underrum af $\mathcal{B}(I, \mathbb{C})$. Endvidere, hvis f og g tilhører $\mathcal{L}_2(I)$, da vil $f\overline{g}$ tilhøre $\mathcal{L}(I, \mathbb{C})$.*

Beviset for $f, g \in \mathcal{L}_2(I) \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}_2(I)$ følger af uligheden $|f(t) + g(t)|^2 \leq 2|f(t)|^2 + 2|g(t)|^2$. Lemmaets anden påstand bygger på uligheden $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ (for $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), som giver

$$\int_I |f\overline{g}|\, dm = \int_I |fg|\, dm \leq \tfrac{1}{2} \int_I |f|^2\, dm + \tfrac{1}{2} \int_I |g|^2\, dm < \infty.$$

Det følger af Lemma 3.2, at $\mathcal{L}_2(I)$ er et vektorrum over $\mathbb{C}$, og at vi kan definere en positiv sesquilinearform på dette rum ved

$$\langle f, g \rangle = \int_I f\overline{g}\, dm, \qquad f, g \in \mathcal{L}_2(I). \tag{3.1}$$

Bemærk, at $\overline{g}\colon I \to \mathbb{C}$ er givet ved punktvis komplex konjungering: $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$.

Det er let at tjekke, at $\langle f, f \rangle \geq 0$ for alle $f \in \mathcal{L}_2(I)$, at $f \mapsto \langle f, g \rangle$ er lineær (for fastholdt g), og at $g \mapsto \langle f, g \rangle$ er konjungeret lineær (for fastholdt f). Endvidere har vi

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_I |f|^2\, dm = 0 \Leftrightarrow |f|^2 = 0 \text{ næsten overalt} \Leftrightarrow f = 0 \text{ næsten overalt.}$$

(Det andet "$\Leftrightarrow$" følger af Lemma 2.5.) Normen hørende til dette indre produkt betegnes med $\|\cdot\|_2$ og den er givet ved

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} = \Big(\int_I |f|^2\, dm \Big)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Vi skal nu give $L_2(I)$ en vektorrumsstruktor og et indre produkt. Hertil har vi først brug for et lemma:

Lemma 3.3 *Lad $f, g, f_1, g_1 \in \mathcal{L}_2(I)$ og lad $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(i) *Hvis $f \sim g$, da er $\lambda f \sim \lambda g$.*

(ii) *Hvis $f \sim f_1$ og $g \sim g_1$, da er $f + g \sim f_1 + g_1$.*

(iii) *Hvis $f \sim f_1$ og $g \sim g_1$, da er $f\overline{g} \sim f_1\overline{g_1}$.*

Definer addition og skalarmulitiplikation på $L_2(I)$ ved

$$[f] + [g] \overset{\text{def}}{=} [f + g], \qquad \lambda[f] \overset{\text{def}}{=} [\lambda f], \quad f, g \in \mathcal{L}_2(I), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Det følger af Lemma 3.3, at disse to operationer er veldefinerede. Problemet er, at vi ikke kender f, blot fordi vi kender $[f]$. Når vi skal definere $[f] + [g]$ kunne vi have valgt et vilkårligt $f_1 \in [f]$ hhv. $g_1 \in [g]$ istedet for f og g. Men da $f_1 \sim f$ og $g_1 \sim g$ vil $f_1 + g_1 \sim f + g$ ifølge Lemma 3.3, så $[f_1 + g_1] = [f + g]$.

Definer en positiv sesquilinearform på $L_2(I)$ ved

$$\langle\, [f], [g]\, \rangle = \int_I f\overline{g}\, dm, \qquad f, g \in \mathcal{L}_2(I). \tag{3.3}$$

Det følger af Lemma 3.3 (iii) at $\langle \cdot , \cdot \rangle$ er veldefineret (jvf. argumentet ovenfor). Ligesom for $\mathcal{L}_2(I)$ har vi

$$\|[f]\|_2^2 \overset{\text{def}}{=} \langle\, [f], [f]\, \rangle = \int_I |f|^2\, dm \geq 0 \tag{3.4}$$

for alle $[f] \in L_2(I)$.

I modsætning til situationen for $\mathcal{L}_2(I)$ er $\langle \cdot , \cdot \rangle$ faktisk et indre produkt på $L_2(I)$, idet vi videre har

$$\begin{aligned} \langle\, [f], [f]\, \rangle = 0 \quad &\iff \quad \int_I |f|^2\, dm = 0 \iff |f|^2 = 0 \ \text{ næsten overalt} \\ &\iff \quad f = 0 \ \text{ næsten overalt} \iff f \sim 0 \\ &\iff \quad [f] = 0. \end{aligned}$$

Theorem 3.4 (Fischer's fuldstændighedsætning) *Det indre produktrum $L_2(I)$ er fuldstændigt, så $L_2(I)$ er et Hilbertrum.*

Beviset benytter bl.a. Lebesgues Sætning om monoton konvergens og følgende iagttagelse: Et normeret rum $(E, \|\cdot\|)$ er fuldstændigt hvis og kun hvis enhver *absolut konvergent* række $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i E er konvergent. (Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ siges at være absolut konvergent hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.)

Vi bemærker afslutningsvist, at $L_2([a, b])$ er fuldstændiggørelsen af $C([a, b], \mathbb{C})$ mht. det indre produkt givet i (0.1). Dette er et dybt resultat, som indeholder Theorem 3.4 og nedenstående ikke-trivielle approximationsresultat:

Sætning 3.5 *For ethvert $f \in \mathcal{L}_2([a,b])$ og for ethvert $\varepsilon > 0$ findes $g \in C([a,b],\mathbb{C})$ således at $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.*

Definer $\varphi\colon C([a,b],\mathbb{C}) \to L_2([a,b])$ ved $\varphi(f) = [f]$. Det er let at tjekke, at φ er lineær og at $\langle \varphi(f), \varphi(g)\rangle = \langle f, g\rangle$ for alle $f, g \in C([a,b],\mathbb{C})$. Hermed er φ *isometrisk* og derfor injektiv. Thi $\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \langle \varphi(f), \varphi(f)\rangle = \|\varphi(f)\|_2^2$. Sætning 3.5 fortæller, at billedet af φ er en tæt delmængde af det fuldstændige rum $L_2([a,b])$. Altså er $L_2([a,b])$ fuldstændiggørelsen af rummet $C([a,b],\mathbb{C})$.

4 Opgaver

Opgave 1. Benyt højresiden af (1.3) til at beregne integralerne $\int_0^1 e^x\,dx$ og $\int_{-1}^3 t^2\,dt$.

Opgave 2. Vis reglerne (B4) og (B5) (idet (B1), (B2) og (B3) antages at gælde). [Vink: Benyt de Morgan's regler til at vise (B4).]

Opgave 3. Vis (et udsnit) af reglerne (m4)–(m8) (idet (m1), (m2) og (m3) antages at gælde).

Opgave 4. Lad $(f_n)_{n=1}^\infty$ være en følge i $C([a,b],\mathbb{C})$, som opfylder $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ for alle $t \in [a,b]$ og antag videre, at der findes $L < \infty$ så $|f_n(t)| \le L$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og for alle $t \in [a,b]$. Vis at

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = 0.$$

Er konklusionen ovenfor korrekt, hvis man ikke medtager antagelsen vedrørende L?

Opgave 5. Vis at $f \in \mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ hvis og kun hvis $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ og $\int_I |f|\,dm < \infty$. Vis herefter, at $f \in \mathcal{L}(I,\mathbb{C})$ hvis og kun hvis $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{C})$ og $\int_I |f|\,dm < \infty$. [Vink: I det reelle tilfælde benyt $|f| = f_+ + f_-$.]

Opgave 6. Lad $(f_n)_{n=1}^\infty$ være en følge i $\mathcal{L}_2([a,b])$ og lad $f \in \mathcal{L}_2([a,b])$. Betragt følgende tre udsagn:

(i) $f_n \to f$ uniformt på $[a,b]$ for $n \to \infty$.

(ii) $f_n(t) \to f(t)$ for $n \to \infty$ for alle $t \in [a,b]$.

(iii) $f_n \to f$ mht. $\|\cdot\|_2$ for $n \to \infty$.

Vis at (i) $\Rightarrow$ (ii) og at (i) $\Rightarrow$ (iii). Vis at ingen af implikationerne (ii) $\Rightarrow$ (iii) og (iii) $\Rightarrow$ (ii) gælder.

Opgave 7. Lad $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Vis at $1_A \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ hvis og kun hvis $m(A) < \infty$. Bestem $\langle 1_A, 1_B\rangle$ når $A, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ opfylder $m(A) < \infty$ og $m(B) < \infty$. Find $A_1, A_2, \dots$ i $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ så $([1_{A_n}])_{n\in\mathbb{N}}$ er et ortonormalt sæt i $L_2(\mathbb{R})$.

Opgave 8. Lad $]a,b[$ være et åbent interval i $\mathbb{R}$. Vis at der findes en følge $(f_n)_{n=1}^\infty$ i $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ således at $f_n(t) \to 1_{]a,b[}(t)$ for $n \to \infty$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Benyt herefter Sætning 1.1 til at vise, at der til hver åben delmængde U af $\mathbb{R}$ findes en følge $(f_n)_{n=1}^\infty$ i $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ således at $f_n(t) \to 1_U(t)$ for $n \to \infty$ for alle $t \in \mathbb{R}$.