Om de reelle tal — supplerende noter til 2AN

1 Supremum og infimum

I disse noter tænker vi os, at vi har fået de reelle tal forærende, og at de reelle tal er et såkaldt ordnet legeme med supremumsegenskaben (se Aksiom 1.2 nedenfor). Man kan faktisk *bevise*, at de reelle tal med disse egenskaber findes, f.eks. ved at tage udgangspunkt i de naturlige tal, som man så må antage, at vi har fået forærende...

At $\mathbb{R}$ er et ordnet legeme vil sige, at $\mathbb{R}$ er udstyret med regneoperationerne $+$ og $\cdot$ samt en ordning $\leq$, og at der gælder en lang stribe af (naturlige og velkendte) aksiomer herfor.

Definition 1.1 (Begrænsede delmængder af $\mathbb{R}$) En delmængde A af de reelle tal $\mathbb{R}$ kaldes *opad begrænset*, hvis der findes et reelt tal s så $x \leq s$ for alle $x \in A$, og s kaldes i givet fald en *øvre grænse* eller en *majorant* for A. Tilsvarende kaldes A *nedad begrænset*, hvis der findes et reelt tal m så $m \leq x$ for alle $x \in A$, og tallet m kaldes da en *nedre grænse* eller en *minorant* for A. Hvis A både er opad og nedad begrænset, da kaldes A *begrænset*.

Ovenstående definition af begrænsethed stemmer overens med definition fra Metriske Rum (s. 1.7 øverst), hvorefter A kaldes begrænset hvis der findes en kugle $K(a,r)$ så $A \subseteq K(a,r) =]a-r, a+r[$. For hvis $A \subseteq]a-r, a+r[$, da gælder $a - r \leq x \leq a + r$ for alle $x \in A$, hvilket gør A nedad og opad begrænset. Omvendt, hvis der findes reelle tal m og s så $m \leq x \leq s$ for alle $x \in A$, da er $A \subseteq K(a,r)$ når $a = (m+s)/2$ og $r > (s-m)/2$.

Aksiom 1.2 (Supremum) *Enhver ikke-tom opad begrænset delmængde A af $\mathbb{R}$ har en* mindste øvre grænse *som benævnes* $\sup A$. *Med andre ord,* $\sup A$ *er et reelt tal som opfylder*

(i) $x \leq \sup A$ *for alle* $x \in A$, *og*

(ii) *hvis s er et reelt tal, som opfylder $x \leq s$ for alle $x \in A$, så er* $\sup A \leq s$.

Det følger af Supremum Aksiomet, at enhver ikke-tom nedad begrænset delmængde A af $\mathbb{R}$ har en *største nedre grænse*, som benævnes $\inf A$; og at $\inf A$ er et reelt tal, som opfylder:

(i) $\inf A \leq x$ for alle $x \in A$, og

(ii) hvis m er et reelt tal, som opfylder $m \leq x$ for alle $x \in A$, så er $m \leq \inf A$.

Hvis A ikke er opad begrænset, da sættes $\sup A = \infty$, og tilsvarende sættes $\inf A = -\infty$, hvis A ikke er nedad begrænset. Endelig sætter man $\sup \emptyset = -\infty$ og $\inf \emptyset = \infty$.

Eksempel 1.3 Der gælder

$$\sup\,[a,b] = \sup\,[a,b[\, = b, \quad \sup \mathbb{Z} = \infty, \quad \inf\,[a,b] = \inf\,]a,b] = a, \quad \inf \mathbb{Z} = -\infty.$$

Bemærkning 1.4 Det fremgår af Eksempel 1.3, at $\sup A$ og $\inf A$ ikke altid tilhører A. Vi har derimod følgende trøstepræmie: Hvis A er en ikke-tom opad begrænset mængde, da kan man til ethvert $\varepsilon > 0$ finde $x \in A$ så

$$\sup A - \varepsilon < x \leq \sup A. \tag{1.1}$$

Benyt nemlig egenskab (ii) i Aksiom 1.2 til at indse, at der *ikke* kan gælde $x \leq \sup A - \varepsilon$ for alle $x \in A$, og at der derfor findes $x \in A$, så $\sup A - \varepsilon < x$. Det følger af (i) i Aksiom 1.2, at $x \leq \sup A$.

Tilsvarende, hvis A er nedad begrænset, så findes til hvert $\varepsilon > 0$ et element $x \in A$ så

$$\inf A \leq x < \inf A + \varepsilon. \tag{1.2}$$

En følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $\mathbb{R}$ siges at være *voksende* hvis $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$, og den siges at være *aftagende*, hvis $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots$. Til enhver følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ kan vi se på den tilhørende delmængde $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ af $\mathbb{R}$. Denne mængde indholder mindre information end følgen selv, f.eks. er mængden af elementer i følgerne

$$(1,2,1,2,1,2,1,2,\dots), \quad (1,2,2,2,2,2,\dots), \quad (2,1,1,1,1,1,\dots)$$

alle tre tilfælde lig med $\{1,2\}$.

Følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ siges at være *opad begrænset*, *nedad begrænset*, hhv. *begrænset* hvis den tilhørende mængde $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ har denne egenskab.

De tre næste resultater er kendt fra Matematik 1.

Sætning 1.5 *Enhver opad begrænset voksende følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ af reelle tal er konvergent. Tilsvarende er enhver nedad begrænset aftagende følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ af reelle tal konvergent.*

Bevis: Mængden $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er pr. antagelse opad begrænset og har derfor et supremum, så det reelle tal $a = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ findes. Vi viser, at $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Ifølge (1.1) findes et naturligt tal N så $a - \varepsilon < x_N \leq a$. Da følgen er voksende, har vi $a - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq a$ for alle $n \geq N$, og dermed $|x_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Dette viser $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Beviset for den anden påstand er analogt. (Alternativt kan denne påstand indses ved at benytte første del af beviset på den voksende følge $(-x_n)_{n=1}^{\infty}$). □

Sætning 1.6 (Arkimedes' princip) *Til et hvert reelt tal x findes et helt tal n således at $x \leq n$.*

Denne sætning kan vises ved at benytte Supremum Aksiomet. Som korollar hertil har vi bl.a.:

Korollar 1.7 *For ethvert par af reelle tal $a < b$ findes et rationalt tal r i det åbne interval $]\,a,b\,[$.*

2 Cauchyfølger i metriske rum

Vi samler her nogle begreber, som tages op i §5 i "Metriske Rum".

Definition 2.1 (Cauchyfølger) En følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i et metrisk rum (M,d) siges at være en *Cauchyfølge* hvis

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \forall n,m \in \mathbb{N} : n,m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Det vises nedenfor, at alle konvergente følger er Cauchy, og at det modsatte ikke (altid) gælder. I en perfekt verden ville Cauchyfølger altid være konvergente, men det metriske rum M kan i nogen tilfælde være mindre perfekt ved at have "huller", så den forventede grænseværdi for visse Cauchyfølger mangler.

Sætning 2.2 *Enhver konvergent følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i et metrisk rum M er en Cauchyfølge.*

Bevis: Antag $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænsepunkt $a \in M$. Lad $\varepsilon > 0$. Find $N \in \mathbb{N}$ så $|x_n - a| < \varepsilon/2$ for alle $n \geq N$. Da har vi

$$n,m \geq N \implies |x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

hvilket viser, at $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchyfølge. $\square$

Eksempel 2.3 De metriske rum $]0,1]$ og $\mathbb{Q}$ med den sædvanlige metrik d har ikke-konvergente Cauchyfølger. I rummet $]0,1]$ er følgen $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy men ikke konvergent (da $0 \notin\,]0,1]$).

Man kan finde en følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ af rationale tal, så $x_n \to \sqrt{2}$. F.eks. kan man vælge x_n i intervallet $]\sqrt{2} - 1/n, \sqrt{2} + 1/n[$, jvf. Korollar 1.7. Men så er $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en Cauchyfølge i $\mathbb{Q}$ som ikke er konvergent (i $\mathbb{Q}$).

Lemma 2.4 *Enhver Cauchyfølge i et metrisk rum er begrænset.*

Bevis: Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en Cauchyfølge. Der skal findes en kugle $K(a,r)$ i M, så $x_n \in K(a,r)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Benyt Cauchy egenskaben til at finde $N \in \mathbb{N}$ så $d(x_n, x_m) < 1$ for alle $n,m \geq N$. Sæt $a = x_1$ og sæt

$$r = 1 + \max\{d(x_2, x_1), d(x_3, x_1), \ldots, d(x_{N-1}, x_1), d(x_N, x_1)\} \in \mathbb{R}.$$

Da er $d(x_n, x_1) \leq r - 1 < r$ for $n = 2, 3, \ldots, N-1$; og for $n \geq N$ har vi

$$d(x_n, x_1) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_1) < 1 + d(x_N, x_1) \leq r.$$

Alt ialt er $x_n \in K(a,r)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definition 2.5 (Fortætningspunkt) Lad (M,d) være et metrisk rum og lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge i M. Et punkt $a \in M$ siges at være et *fortætningspunkt* for $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ hvis mængden $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(a,r)\}$ er uendelig for alle $r > 0$.

Det kan vises, at hvis a er fortætningspunkt for *mængden* $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, så er a fortætningspunkt for *følgen* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Det modsatte gælder ikke: f.eks. er både 0 og 1 fortætningspunkter for følgen $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, mens mængden $\{0, 1\}$ ikke har noget fortætningspunkt.

Husk at udsagnene $x_n \in K(a, r)$ og $d(x_n, a) < r$ er ækvivalente.

Sætning 2.6 *Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge i et metrisk rum M og lad $a \in M$. Da er nedenstående tre betingelser ækvivalente:*

(i) *a er et fortætningspunkt for følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

(ii) $\forall r > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \geq N : x_n \in K(a, r)$.

(iii) *Der findes en delfølge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ af $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ så $x_{n_k} \to a$ for $k \to \infty$.*

Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii). Antag a er fortætningspunkt for $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Lad $r > 0$ og $N \in \mathbb{N}$ være givet. Da gælder

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(a, r)\} \nsubseteq \{1, 2, \dots, N - 1\},$$

da mængden til venstre pr. antagelse er uendelig. Derfor findes $n \geq N$ i mængden til venstre, og for dette n har vi $x_n \in K(a, r)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Vi benytter (ii) til at finde $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ så $d(x_{n_k}, a) < 1/k$: Find først $n_1 \geq 1$ så $d(x_{n_1}, a) < 1$. Herefter, når $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ er fundet, så brug (ii) igen til at finde $n_k \geq n_{k-1} + 1$ opfyldende $d(x_{n_k}, a) < 1/k$. Da vil $x_{n_k} \to a$ for $k \to \infty$ som ønsket.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Antag der findes en delfølge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ så $x_{n_k} \to a$ for $k \to \infty$. Lad $r > 0$. Da findes $K \in \mathbb{N}$ så $x_{n_k} \in K(a, r)$ for alle $k \geq K$. Men så har vi

$$\{n_K, n_{K+1}, n_{K+2}, \dots\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(a, r)\},$$

hvilket viser, at mængden på højre hånd er uendelig, og dermed, at a er et fortætningspunkt. $\square$

Grænsepunktet for en konvergent følge er et fortætningspunkt og det eneste fortætningspunkt for følgen. Cauchyfølger er konvergente hvis og kun hvis de har et fortætningspunkt:

Lemma 2.7 *Hvis a er et fortætningspunkt for en Cauchyfølge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ så vil $x_n \to a$ for $n \to \infty$.*

Bevis: Lad $\varepsilon > 0$. Find $N \in \mathbb{N}$ så $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ for alle $n \geq N$. Benyt nu Sætning 2.6 (ii) til at finde $n_0 \geq N$ så $d(x_{n_0}, a) < \varepsilon/2$. For alle $n \geq N$ gælder

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

og dette viser, at $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. $\square$

3 Limes superior og limes inferior

Til enhver reel talfølge $(x_n)_{n=1}^\infty$ knyttes størrelserne *limes superior*, $\limsup_{n\to\infty} x_n$, og *limes inferior*, $\liminf_{n\to\infty} x_n$, (som enten er reelle tal, eller som er lig med $-\infty$ eller ∞).

Betragt størrelserne

$$t_n = \inf_{k\geq n} x_k = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}, \qquad s_n = \sup_{k\geq n} x_k = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Bemærk at t_n og s_n tilhører $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ og at

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \cdots \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1. \tag{3.1}$$

(At $(t_n)_{n=1}^\infty$ er voksende og $(s_n)_{n=1}^\infty$ er aftagende skyldes, at vi tager infimum hhv. supremum over mindre og mindre mængder; og for $n, m \in \mathbb{N}$ har vi $t_n \leq x_k \leq s_m$ for alle $k \geq \max\{n, m\}$.) Definer

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k. \tag{3.2}$$

Da følgerne $(s_n)_{n=1}^\infty$ og $(t_n)_{n=1}^\infty$ er monotone, er de faktisk konvergente, hvis de tilmed er begrænsede (Sætning 1.5), og i det tilfælde har vi

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k.$$

Nogle gange benyttes den kortere skrivemåde $\limsup x_n$ hhv. $\liminf x_n$.

Eksempel 3.1

(1). Lad $x_n = n$. Her er $s_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\} = \infty$ og $t_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\} = n$ for alle n, og altså er $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$ og $\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} n = \infty$.

(2). Lad $x_n = 1/n$. Her er $s_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\} = 1/n$ og $t_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\} = 0$, og dermed bliver $\limsup_{n\to\infty} 1/n = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1/n = 0$ og $\liminf_{n\to\infty} 1/n = \sup_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$.

(3). Lad $x_n = (-1)^n$. Her er $s_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\} = 1$ og $t_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\} = -1$ for alle n, og dermed har vi $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$ og $\liminf_{n\to\infty} x_n = -1$.

(4). Lad $x_n = -n$. Her er $s_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\} = -n$ og $t_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\} = -\infty$, og dermed er $\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(-n) = -\infty$ og $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Det følger umiddelbart af (3.1) og (3.2) at

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \cdots \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \cdots \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1 \tag{3.3}$$

for alle reelle talfølger $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Theorem 3.2 *En reel talfølge $(x_n)_{n=1}^\infty$ er konvergent med grænseværdi $a \in \mathbb{R}$ hvis og kun hvis*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = a.$$

Bevis: Som før sættes $s_n = \sup_{k\geq n} x_k$ og $t_n = \inf_{k\geq n} x_k$.

Antag først, at $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi $a \in \mathbb{R}$. Til et vilkårligt $\varepsilon > 0$ findes N så $|x_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Dermed er $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ for alle $n \geq N$, hvilket sammen med (3.3) implicerer

$$a - \varepsilon \leq t_N \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq s_N \leq a + \varepsilon.$$

Specielt har vi $|\liminf x_n - a| \leq \varepsilon$ og $|\limsup x_n - a| \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, må $\limsup x_n = \liminf x_n = a$.

Vi skal nu vise, at lighed af limes inferior og limes superior medfører konvergens. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Ifølge antagelse har vi $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n$. Vi kan derfor benytte (1.1) og (1.2) til at finde N_1 og N_2 i $\mathbb{N}$ så $a - \varepsilon < t_{N_1} \leq a$ og $a \leq s_{N_2} < a + \varepsilon$. Sæt $N = \max\{N_1, N_2\}$. For alle $n \geq N$ gælder $t_{N_1} \leq x_n \leq s_{N_2}$, og dermed

$$a - \varepsilon < t_{N_1} \leq x_n \leq s_{N_2} < a + \varepsilon,$$

hvilket giver $|x_n - a| < \varepsilon$. $\square$

De næste to resultater giver nyttige beskrivelser af lim inf og lim sup.

Lemma 3.3 *Hvis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er en begrænset talfølge, da er $\limsup x_n$ og $\liminf x_n$ begge reelle tal (og altså ikke $-\infty$ eller ∞). Mere specifikt, hvis $a \leq x_n \leq b$ for alle $n \in \mathbb{N}$, da er*

$$a \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq b. \tag{3.4}$$

Bevis: Hvis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er begrænset, så findes reelle tal a og b så $a \leq x_n \leq b$ for alle n. Vi skal derfor blot vise, at denne betingelse medfører, at (3.4) er opfyldt. Men hvis $a \leq x_n \leq b$, så er

$$a \leq t_n = \inf_{k\geq n} x_k \leq b, \qquad a \leq s_n = \sup_{k\geq n} x_k \leq b,$$

for alle n, hvilket videre medfører

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n \in [a,b], \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n \in [a,b].$$

$\square$

Sætning 3.4 *Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en reel talfølge.*

(i) *Antag $a = \limsup x_n$ er et reelt tal. Da gælder for ethvert $\varepsilon > 0$ at*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - a| < \varepsilon\} \text{ er uendelig og } \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq a + \varepsilon\} \text{ er endelig.}$$

(ii) *Antag $b = \liminf x_n$ er et reelt tal. Da gælder for ethvert $\varepsilon > 0$ at*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - b| < \varepsilon\} \text{ er uendelig og } \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq b - \varepsilon\} \text{ er endelig.}$$

Bevis: (i). Sæt $s_n = \sup_{k\geq n} x_k$, og antag $a = \limsup x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n$ er et reelt tal. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Benyt (1.2) til at finde $N \in \mathbb{N}$ så $a \leq s_N < a+\varepsilon$. Nu er $x_n \leq s_N < a+\varepsilon$ for alle $n \geq N$, hvilket viser

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq a+\varepsilon\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N-1\},$$

og dermed, at mængden på venstre hånd er endelig.

Antag, for at nå en modstrid, at $\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - a| < \varepsilon\}$ er endelig. Så er også

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > a-\varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - a| < \varepsilon\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq a+\varepsilon\}$$

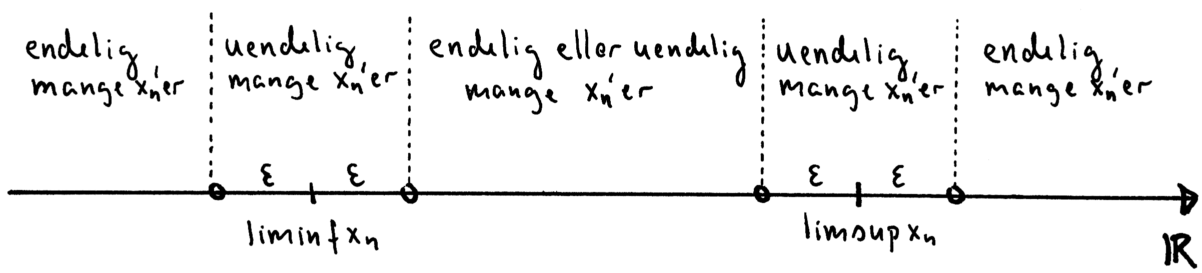
endelig, hvilket giver

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > a-\varepsilon\} < \infty.$$

For $n > M$ gælder $x_n \leq a-\varepsilon$, og dermed $a \leq s_{M+1} \leq a-\varepsilon$, hvilket er en modstrid. Vi kan altså konkludere, at $\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - a| < \varepsilon\}$ er uendelig.

Påstanden vedrørende lim inf kan vises på en tilsvarende måde. $\square$

I tilfældet, hvor $\limsup x_n$ og $\liminf x_n$ begge er reelle tal (og forskellige fra hinanden), kan resultatet fra Sætning 3.4 sammenfattes i tegningen:



Det følger umiddelbart af Sætning 3.4 (og Definition 2.5), at $\limsup x_n$ og $\liminf x_n$ er fortætningspunkter for følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (når $\limsup x_n$ hhv. $\liminf x_n$ er reelle tal). Kombineres dette med Sætning 2.6 får vi:

Korollar 3.5 *Lad* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *være en reel talfølge. Hvis* $\limsup_{n\to\infty} x_n$ *er et reelt tal, så findes en delfølge* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *så*

$$x_{n_k} \to \limsup_{n\to\infty} x_n \quad \textit{for} \;\; k \to \infty.$$

Der gælder tilsvarende, at $\liminf_{n\to\infty} x_n$ *er grænsepunkt for en delfølge af* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *hvis* $\liminf_{n\to\infty} x_n$ *er et reelt tal.*

Det indses endvidere fra Sætning 3.4, at $\limsup x_n$ er det største fortætningspunkt for $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, og $\liminf x_n$ er det mindste fortætningspunkt.

Theorem 3.6 (Bolzano–Weierstrass) *Enhver talfølge i et lukket begrænset interval* $[a,b]$ *har et fortætningspunkt.*

Bevis: Hvis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er en følge i $[a,b]$, så er følgen begrænset, og $\limsup x_n$ er et reelt tal ifølge Lemma 3.3. Vi kan nu bruge Korollar 3.5 og (og Sætning 2.6) til at indse, at $\limsup x_n$ er et fortætningspunkt for $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Theorem 3.7 (Det almindelige konvergensprincip) *Enhver Cauchyfølge i* $\mathbb{R}$ *er konvergent.*

Bevis: Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en Cauchyfølge i $\mathbb{R}$. Lemma 2.4 fortæller, at $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er begrænset, og vi kan derfor slutte af Theorem 3.6, at $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ har et fortætningspunkt $c \in \mathbb{R}$ (som kan tages til at være $\limsup x_n$). Det følger nu af Lemma 2.7, at $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænsepunkt c. □

4 Opgaver

Opgave 1. Vis, at $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$ for enhver talfølge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Opgave 2. Find lim sup og lim inf for følgerne $\left((-1)^n n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ og $\left(\cos(n\frac{\pi}{2})\right)_{n=1}^{\infty}$.

Opgave 3. For hver af nedenstående følger ønskes sup, inf, lim sup, og lim inf bestemt. Endvidere skal der i de tilfælde hvor lim sup hhv. lim inf er et reelt tal (altså ikke ∞ hhv. $-\infty$) findes delfølger af de givne følger, som konvergerer mod lim sup hhv. lim inf.

(i) $42, 7, 7, 7, 7, \ldots,$

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots,$

(iii) $2, -1, 3/2, -1/2, 4/3, -1/3, 5/4, -1/4, \ldots,$

(iv) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots,$

(v) $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots,$

(vi) $1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, \ldots.$

Opgave 4. Find samtlige fortætningspunkter for følgerne i Opgave 3.

Opgave 5. Konstruer en reel talfølge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ som opfylder

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = 25, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = 5, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$