Riemann integralet af kontinuerte funktioner — supplerende noter til 2AN

Vi minder kort om definitionen fra Matematik 1 af det bestemte integral af en begrænset funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Til enhver inddeling $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ af $[a,b]$, hvor

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

knyttes tallene

$$G_j = \sup\{f(t) \mid t \in [x_{j-1}, x_j]\}, \qquad g_j = \inf\{f(t) \mid t \in [x_{j-1}, x_j]\}, \tag{1}$$

$$O(f,D) = \sum_{j=1}^{n} G_j(x_j - x_{j-1}), \qquad U(f,D) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j - x_{j-1}). \tag{2}$$

Tallet $O(f,D)$ kaldes *oversummen* for f hørende til inddelingen D, og tilsvarende kaldes $U(f,D)$ *undersummen* for f hørende til inddelingen D. Hvis D, D' er to inddelinger af $[a,b]$, da gælder $U(f,D) \le O(f,D')$. Dette medfører

$$\begin{aligned} &\sup\{U(f,D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} \\ &\qquad \le \inf\{O(f,D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\}, \end{aligned} \tag{3}$$

for enhver begrænset funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definition 1 En begrænset funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kaldes *Riemann integrabel* hvis der gælder:

$$\sup\{U(f,D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} = \inf\{O(f,D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\}.$$

I givet fald defineres $\int_a^b f(t)dt$ til at være den fælles værdi ovenfor.

Vi taler om "Riemann integrable funktioner" (snarere end blot integrable funktioner) dels for at anerkende Riemann's betydning for dette begreb, og dels for at skelne Riemann integralet fra *Lebesgue integralet*, som kort vil blive omtalt i dette kursus, og som udvikles detaljeret i kurset 3MI.

Nedenfor vises, at enhver kontinuert funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er Riemann integrabel. Vi bemærker hertil først følgende nyttige lemma:

Lemma 2 *En begrænset funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er Riemann integrabel hvis der til hvert $\varepsilon > 0$ findes en inddeling D af $[a,b]$ således at $O(f,D) - U(f,D) \le \varepsilon$.*

Bevis: Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Find hertil en inddeling D_0 af $[a,b]$ så $O(f,D_0) - U(f,D_0) \le \varepsilon$. Da er

$$\begin{aligned}\inf\{O(f,D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} &\le O(f,D_0) \le U(f,D_0) + \varepsilon \\ &\le \sup\{U(f,D) \mid D \text{ er en inddeling af } [a,b]\} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Da dette holder for alle $\varepsilon > 0$, må der gælde $\inf\{O(f,D)\} \le \sup\{U(f,D)\}$. Den modsatte ulighed er sand ifølge (3). Derfor må f være Riemann integrabel. $\square$

Sætning 3 *Enhver kontinuert funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er Riemann integrabel.*

Bevis: Bemærk først, at $[a,b]$ er kompakt (jvf. Sætning 6.6). Da f er kontinuert, er f automatisk begrænset (Sætning 6.10).

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi finder en inddeling D af $[a,b]$ så $O(f,D) - U(f,D) \le \varepsilon$. Sætningen vil herefter følge af Lemma 2.

Ifølge Sætning 6.20 er f uniformt kontinuert. Vi kan derfor finde $\delta > 0$ så

$$\forall\, x, y \in [a,b] : |x - y| \le \delta \implies |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Vælg et naturligt tal $n \ge (b-a)\delta^{-1}$, og lad D være inddelingen af $[a,b]$ i n lige store delintervaller, dvs. $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, hvor

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \tfrac{1}{n}(b-a), \quad x_2 = a + \tfrac{2}{n}(b-a), \quad \cdots, \quad x_{n-1} = a + \tfrac{n-1}{n}(b-a), \quad x_n = b.$$

Lad $j = 1, 2, \ldots, n$. Hvis $s, t \in [x_{j-1}, x_j]$, så er $|s - t| \le x_j - x_{j-1} = (b-a)/n \le \delta$, og dermed er $f(s) - f(t) \le |f(s) - f(t)| \le \varepsilon/(b-a)$. Med notationen fra (1) har vi nu

$$\begin{aligned} G_j - g_j &= \sup\{f(s) \mid s \in [x_{j-1}, x_j]\} - \inf\{f(t) \mid t \in [x_{j-1}, x_j]\} \\ &= \sup\{f(s) \mid s \in [x_{j-1}, x_j]\} + \sup\{-f(t) \mid t \in [x_{j-1}, x_j]\} \\ &= \sup\{f(s) - f(t) \mid s, t \in [x_{j-1}, x_j]\} \\ &\le \varepsilon/(b-a). \end{aligned}$$

Vi benytter nu (2) til at udregne:

$$O(f,D) - U(f,D) = \sum_{j=1}^{n} (G_j - g_j)(x_j - x_{j-1}) \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

som ønsket. $\square$