Supplerende opgave 3, ugeseddel 1

Gunnar Restorff

November 22, 2001

Lad $[a, b]$ være et delinterval af den reelle akse $\mathbb{R}$ med $a < b$. Vi får i opgaven brug for følgende meget nyttige lemma:

Lemma 1 *Lad $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ være to (Riemann-)integrable funktioner. Da gælder, at*

$$\forall x \in [a, b](f(x) \leq g(x)) \tag{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{2}$$

Bevis: Antag (1), vi vil så vise (2). Vi har altså, at

$$\forall x \in [a, b](0 \leq g(x) - f(x)).$$

Så ifølge korollar 8.6 i *MAI* (Ebbe Thue Poulsen og Klaus Thomsen: *Matematisk Analyse I*) er

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx,$$

hvor sidste lighedstegn følger af sætning 8.10 i *MAI*. □

Delspørgsmål (i). Lad $f : [a, b] \to [0, \infty[$ være en kontinuert funktion. Vi skal så vise, at

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \tag{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in [a, b](f(x) = 0). \tag{4}$$

I stedet viser vi det kontraponerede udsagn: $\neg(4) \Rightarrow \neg(3)$. Antag således $\neg(4)$. Dvs. at der findes et $x_0 \in [a, b]$, således at $f(x_0) > 0$ (da f er ikke-negativ). Da f er kontinuert, har vi, at (*MAI*, def. 5.2)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a, b] \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right).$$

Dvs. for $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ findes et $\delta \in]0, \frac{b-a}{2}[$, så $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2$ for alle $x \in [a,b]$ med $|x - x_0| < \delta$. Altså er

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) > -f(x_0)/2 + f(x_0) = f(x_0)/2, \tag{5}$$

for alle $x \in [a,b]$ med $|x - x_0| < \delta$. Lad $\alpha = \max\{a, x_0 - \delta\}$ og $\beta = \min\{b, x_0 + \delta\}$. Så har vi, at

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x_0)/2\,dx \geq \delta f(x_0)/2 > 0.$$

Første ulighedstegn følger af Lemma 1 ovenover, idet f er ikke-negativ; det næste følger af Lemma 1 samt (5); medens det tredie ulighedstegn følger af, at $\delta \leq \beta - \alpha$ (overvej!).

Delspørgsmål (ii). Lad $C([a,b])$ være vektorrummet af kontinuerte funktioner $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Vi skal så vise, at der ved

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx, \quad f \in C([a,b])$$

defineres en norm på $C([a,b])$.

Vi bemærker først, at hvis f er kontinuert, så er $x \mapsto |f(x)|$ også en kontinuert funktion. Lad $f, g \in C([a,b])$ være vilkårlige. Da $|f(x)| \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$, er $\|f\|_1 \geq 0$. Det er klart, at hvis $f = 0$, så er $\|f\|_1 = 0$. Hvis omvendt $\|f\|_1 = 0$, følger det af (i), at $f = 0$. Dvs. at (N1) er opfyldt. Af sætning 8.10 i *MAI* følger, at $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1$ for alle $\lambda \in \mathbb{C}$ (overvej!) – dvs. (N2) er opfyldt. Endvidere er

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x) + g(x)|dx \leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)\,dx = \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

(brug bl.a. lemmaet) – dvs. (N3) er opfyldt. Altså er $\|\cdot\|_1$ en norm på $C([a,b])$.

Delspørgsmål (iii). Nu kigger vi på tilfældet, hvor $[a,b] = [0,1]$. Lad $f_n(t) = t^{1/n}$ og $f(t) = 1$ for $t \in [0,1]$. Vi skal så vise, at $f_n \to f$ mht. $\|\cdot\|_1$, og at der *ikke* gælder, at $f_n \to f$ mht. $\|\cdot\|_u$.

Vi bemærker først, at $f, f_n \in C([a,b])$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi har, at

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 \left(1 - x^{1/n}\right) dx = \left[x - \tfrac{n}{n+1} x^{\frac{1+n}{n}}\right]_{x=0}^{x=1} = 1 - \tfrac{n}{n+1} - (0-0) = \tfrac{1}{n+1} \to 0,$$

for $n \to \infty$. Men

$$\|f_n - f\|_u = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [a,b]\} \geq |f_n(0) - f(0)| = 1.$$

Dvs. $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergerer *ikke* mod f mht. $\|\cdot\|_u$.