

Matematik 2AN

Opgave 2 fra eksamenen juni 1999

Christian Aastrup

12. december 2001

1 Hilbertrum

Jeg lader H være et uendeligtdimensionalt Hilbertrum, og $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis. Ved

$$X = \overline{\text{span}\{e_{2n} | n \in \mathbb{N}\}} \\ Y = \overline{\text{span}\{e_{2n-1} | n \in \mathbb{N}\}}$$

defineres to afsluttede underrum af H .

1.1 En vektor i H

Jeg vil vise, at

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}} e_n$$

er en vektor i H , altså vise at rækken er konvergent i H .

Jeg har, at $(n^{-\frac{3}{4}} e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er et ortogonalt sæt, idet

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow \langle n^{-\frac{3}{4}} e_n, m^{-\frac{3}{4}} e_m \rangle = (nm)^{-\frac{3}{4}} \langle e_n, e_m \rangle = 0$$

Sætning 1.10 giver mig nu, at x konvergerer i H , altså $x \in H$ hvis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|n^{-\frac{3}{4}} e_n\|^2 < \infty \quad (1)$$

Jeg beregner

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|n^{-\frac{3}{4}} e_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-\frac{3}{4}}|^2 \|e_n\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-\frac{3}{4}}|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

idet $\|e_n\| = 1$ for alle n .

Jeg kan benytte **Integralkriteriet** til at afgøre om rækken (2) er konvergent, idet rækken klart er positiv og aftagende. Jeg betragter

$$\int_1^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} dn = 2 < \infty$$

hvilket giver, at (2) er konvergent, og (1) dermed er opfyldt. Jeg kan nu slutte, at $x \in H$.

1.2 Projektion af x på X

Projektionen af x på X er givet ved

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{2n} \rangle e_{2n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\frac{3}{4}} e_i, e_{2n} \right\rangle e_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \langle i^{-\frac{3}{4}} e_i, e_{2n} \rangle e_{2n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\frac{3}{4}} \langle e_i, e_{2n} \rangle e_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-\frac{3}{4}} \langle e_{2n}, e_{2n} \rangle e_{2n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-\frac{3}{4}} e_{2n}
 \end{aligned}$$

Tredje lighedstegn gælder idet $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \rightarrow \mathbb{C}$ er kontinuert, og ved det femte lighedstegn har jeg benyttet, at kun diagonalledene svarende til $i = 2n$ bidrager til summen på grund af ortogonalitetsantagelsen.

1.3 $X \subseteq Y^\perp$ & $Y \subseteq X^\perp$

Jeg vil vise, at $X \subseteq Y^\perp$ og $Y \subseteq X^\perp$. For vilkårlige $x \in X$ og $y \in Y$, gælder der for passende $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{C}$ at

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} e_{2n} & \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{2n}|^2 < \infty \\
 y &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n-1} e_{2n-1} & \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{2n-1}|^2 < \infty
 \end{aligned}$$

Jeg har nu

$$\begin{aligned}
 \forall (x, y) \in X \times Y : \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} e_{2n}, \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{2m-1} e_{2m-1} \right\rangle \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{2n} \lambda_{2m-1} \langle e_{2n}, e_{2m-1} \rangle = 0
 \end{aligned}$$

Det sidste lighedstegn kommer idet $\forall n, m \in \mathbb{N} : 2n \neq 2m - 1$.

Jeg har nu

$$(\forall x \in X \forall y \in Y) : x \perp y \Rightarrow X \subseteq Y^\perp \wedge Y \subseteq X^\perp$$

1.4 $x = h + k$

Jeg vil gøre rede for at enhver vektor $x \in H$ kan skrives entydigt på formen

$$x = h + k$$

hvor $h \in X$ og $k \in Y$.

1.4.1 $x = h + k$ eksisterer for alle $x \in H$

Jeg betragter en vilkårlig vektor $x \in H$, den opfylder for en passende følge $(\psi_n)_{n=1}^\infty$, hvor $\psi_i \in \mathbb{C}$ for alle $i \in \mathbb{N}$, at

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 < \infty$$

Jeg kan finde projektionen af x på X analogt med 1.2

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2n} e_{2n}$$

og ligeledes projektionen af x på Y

$$k = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2n-1} e_{2n-1}$$

Betragter nu $h + k$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2n} e_{2n} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2n-1} e_{2n-1} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{2n} e_{2n} + \psi_{2n-1} e_{2n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e_n \\ &= x \end{aligned}$$

Fremstillingen $x = h + k$ findes altså

1.4.2 Entydighed af $x = h + k$ for alle $x \in H$

Idet $X \subseteq Y^\perp$ & $Y \subseteq X^\perp$ har jeg

$$(\forall h \in X \setminus \{0\} \forall k \in Y \setminus \{0\}) : h \neq -k$$

Dette gælder, idet

$$\forall l \in X \cap Y : l \in X \cap X^\perp \Rightarrow \|l\|^2 = \langle l, l \rangle = 0 \Leftrightarrow l = 0$$

Jeg antager nu, at jeg har to fremstillinger af et $x \in H$, således at

$$\begin{aligned} x &= h + k \\ x &= h' + k' \end{aligned}$$

hvor $h, h' \in X$ og $k, k' \in Y$, og hvor

$$h' \neq h \quad \wedge \quad k' \neq k$$

Betragter $x - x$

$$0 = x - x = (h + k) - (h' + k') = (h - h') + (k - k') \quad (3)$$

Jeg har, at

$$\begin{aligned} h - h' \neq 0 &\Rightarrow h - h' \in X \setminus \{0\} \\ k - k' \neq 0 &\Rightarrow k - k' \in Y \setminus \{0\} \end{aligned}$$

hvilket giver mig, at $h - h' \neq -(k - k')$ hvilket er i modstrid med (3), fremstillingen $x = h + k$ kan ikke være tvetydig.

Jeg konkluderer derfor, at fremstillingen $x = h + k$ er entydig.

1.5 $X = Y^\perp$ & $Y = X^\perp$

Jeg betragter en vilkårlig vektor $v \in Y^\perp \subseteq H$. Den opfylder

$$\forall y \in Y : \langle y, v \rangle = 0$$

Hvilket giver at projektionen af v på Y er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_{2n-1} \rangle e_{2n-1} = 0$$

idet jeg har $e_{2n-1} \in Y$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og der dermed gælder, at $\langle v, e_{2n-1} \rangle = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Jeg har fra 1.4.1, at v kan skrives således

$$\begin{aligned} v &= \text{proj}_X(v) + \text{proj}_Y(v) \\ &= \text{proj}_X(v) + 0 \\ &= \text{proj}_X(v) \in X \end{aligned}$$

Analogt kan jeg skrive ethvert $w \in X^\perp$ som

$$\begin{aligned} w &= \text{proj}_X(w) + \text{proj}_Y(w) \\ &= 0 + \text{proj}_Y(w) \\ &= \text{proj}_Y(w) \in Y \end{aligned}$$

Dette betyder, at $X \supseteq Y^\perp$ & $Y \supseteq X^\perp$, hvilket sammenholdt med 1.3 giver

$$X = Y^\perp \quad \wedge \quad Y = X^\perp$$