Matematik 2AN

Opgave 4 fra eksamenen januar 2001

Christian Aastrup

26. november 2001

1 Banachs fixpunktssætning & Lipschitz

Jeg lader $(M, \|\cdot\|) = ([0,1]^2, \|\cdot\|_\infty)$, hvor

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

Jeg definerer afbildningen $T : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ ved foreskriften

$$T(x,y) = \left(e^{-\frac{1}{4}xy}, \cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\right)$$

Jeg antager, at afbildningen er Lipschitzkontinuert med konstant $C < 1$.

1.1 Et ligningssystem hvor $T(x,y) = (x,y)$

Jeg vil vise, at ligningssystemet

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{4}xy} &= x \\ \cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right) &= y \end{aligned}$$

har netop én løsning.
Dette er ækvivalent med at vise, at afbildningen T har et og kun et fixpunkt, da fixpunkterne for T vi være løsningerne til systemet.
Da afbildningen er Lipschitzkontinuert med konstant $C < 1$ på $([0,1]^2, \|\cdot\|_\infty)$ som er fuldstændigt, er den en *ægte kontraktion* på et Banachrum. Banachs fixpunktsætning giver mig nu, at T har netop et fixpunkt $a \in [0,1]^2$ og at følgen $(x_n)_{n=1}^\infty$ i hvor $x_n = T(x_{n-1})$ og $x_0 \in [0,1]^2$ opfylder

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Jeg kan approksimere a numerisk

$$a \approx (0.8589006372, 0.7083568443)$$

1.2 Lipschitzafbildning

Jeg bemærker, at

$$\forall a, b \in [0,1] : |a - b| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \leq 2\max\{|a|, |b|\} \tag{1}$$

Funktionen $[0,1] \ni x \mapsto e^{-x}$ er kontinuert differentiabel med en begrænset differentialkvotient. Den er iflg. **Opgave 3.3** Lipschitzkontinuert, så

$$\begin{aligned} |e^{-s} - e^{-t}| &\leq \sup_{x\in[0,1]} \left\{ \left| \tfrac{d}{dx} e^{-x} \right| \right\} |s - t| \\ &\Downarrow \\ |e^{-s} - e^{-t}| &\leq |s - t| \end{aligned} \tag{2}$$

Funktionen $[0,1] \ni x \mapsto \cos x$ er kontinuert differentiabel med en begrænset differentialkvotient. Den er iflg. **Opgave 3.3** Lipschitzkontinuert, så

$$\begin{aligned}
|\cos s - \cos t| &\leq \sup_{x\in[0,1]} \left\{ \left| \tfrac{d}{dx} \cos x \right| \right\} |s-t| \\
&\Downarrow \\
|\cos s - \cos t| &\leq (\sin 1)|s-t| \qquad (3)
\end{aligned}$$

Jeg vil vise, at T er Lipschitz med $C = \max\{\frac{1}{2}, \sin 1\}$. Jeg kalder T's koordinatfunktioner for T_1 og T_2, hvor

$$\begin{aligned}
T_1(x,y) &= e^{\frac{1}{4}xy} \\
T_2(x,y) &= \cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}$$

1.2.1 T_1 er Lipschitz

Hvis jeg benytter mig af (2) så har jeg

$$\begin{aligned}
|T_1(x',y') - T_1(x'',y'')| &= |e^{-\frac{1}{4}x'y'} - e^{-\frac{1}{4}x''y''}| \\
&\leq |\tfrac{1}{4}x'y' - \tfrac{1}{4}x''y''| = \tfrac{1}{4}|x'y' - x''y''| \\
&\leq \tfrac{1}{4}|x'y' - x''y''| \leq \tfrac{1}{4}(|x'||y'-y''| + |y''||x'-x''|) \\
&\leq \tfrac{1}{4}(|x'-x''| + |y'-y''|) \leq \tfrac{1}{4}|2\max\{x'-x'', y'-y''\}| \\
&= \tfrac{1}{2}\max\{|x'-x''|, |y'-y''|\} = \tfrac{1}{2}\|(x'-x'', y'-y'')\|_\infty
\end{aligned}$$

T_1 er Lipschitzkontinuert med $C = \frac{1}{2}$

1.2.2 T_2 er Lipschitz

Hvis jeg benytter mig af (3) og (1) så har jeg

$$\begin{aligned}
|T_2(x',y') - T_2(x'',y'')| &= \left|\cos\left(\tfrac{x'+y'}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{x''+y''}{2}\right)\right| \\
&\leq (\sin 1)\left|\tfrac{x'+y'}{2} - \tfrac{x''+y''}{2}\right| = (\sin 1)\left|\tfrac{(x'-x'')+(y'-y'')}{2}\right| \\
&\leq (\sin 1)\left|\tfrac{2\max\{x'-x'', y'-y''\}}{2}\right| = (\sin 1)\|(x'-x'', y'-y'')\|_\infty
\end{aligned}$$

T_2 er Lipschitzkontinuert med $C = \sin 1$

1.2.3 T er Lipschitz

Betragter jeg

$$\|T(x',y') - T(x'',y'')\|_\infty = \max\{|T_1(x',y') - T_1(x'',y'')|, |T_2(x',y') - T_2(x'',y'')|\}$$

så kan jeg ud fra 1.2.1 og 1.2.2 slutte, at

$$\|T(x',y') - T(x'',y'')\|_\infty \leq \max\{\tfrac{1}{2}, \sin 1\}\|(x'-x'', y'-y'')\|_\infty$$

Altså, at T er Lipschitz med $C = \max\{\frac{1}{2}, \sin 1\} = \sin 1 \approx 0.841$