Matematik 2AN

Opgave 1 fra eksamenen januar 1997

Christian Aastrup

12. november 2001

1 Fortætningspunkter

Jeg lader (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum og $f : X \to Y$ være en kontinuert afbildning.

1.1 Fortætningspunkt i Y

Jeg antager, at $x \in X$ er et fortætningspunkt for følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i X. Dette betyder, at der findes en delfølge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ af $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, hvor

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

Når jeg ser på delfølgen $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ giver følgekarakteriseringen af kontinuerte afbildninger (Sætning 3.1), at

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$$

Nu har jeg, at følgen $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ i Y har en delfølge $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$, der konvergerer mod $f(x) \in Y$, så er $f(x)$ et fortætningspunkt.

1.2 Fortætningspunkt i $X \times X$

Jeg antager, at $x \in X$ er et fortætningspunkt for følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i X. Dette betyder, at der findes en delfølge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ af $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, hvor

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

Når jeg ser på delfølgen $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ som er konvergent i X giver Sætning 4.3, at delfølgen $((x_{n_k}, x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ er konvergent i $X \times X$, og

$$\lim_{k\to\infty} (x_{n_k}, x_{n_k}) = (x, x)$$

hvilket medfører, at følgen $((x_n, x_n))_{n=1}^{\infty}$ i $X \times X$ har et fortætningspunkt i

$$(x, x) \in X \times X$$

1.3 Ingen fortætningspunkter i $\mathbb{R}^2$

Jeg antager, at $X = Y = \mathbb{R}$ udstyret med den sædvanelige metrik, og jeg lader følgerne $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ være givet ved

$$x_n = \begin{cases} n & \text{hvis } n \text{ er lige} \\ 0 & \text{hvis } n \text{ er ulige} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} n & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ 0 & \text{hvis } n \text{ er lige} \end{cases}$$

Begge følger har den konstante og dermed konvergente følge $(0)_{n=1}^{\infty}$ som delfølge. 0 er derfor et fortætningspunkt for $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.
Jeg ser nu på følgen $(z_n)_{n=1}^{\infty} = ((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ i $\mathbb{R}^2$. Jeg vil vise, at der ikke findes noget fortætningspunkt for følgen. Idet

$$(z_n)_{n=1}^{\infty} = (0,1),(2,0),(0,3),(4,0)\dots$$

har jeg, at

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow d(z_n, z_m) \geq 1 \tag{1}$$

fordi

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : a \neq b \Rightarrow \begin{cases} d((0,a),(0,b)) = |a-b| \geq 1 \\ \\ d((a,0),(b,0)) = |a-b| \geq 1 \end{cases}$$
$$\forall a, b \in \mathbb{N} : d((0,a),(b,0)) = \sqrt{a^2+b^2} > a \geq 1$$

Jeg betragter vilkårligt $a \in \mathbb{R}^2$. Punktet a vil være et fortætningspunkt for $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ hvis

$$\forall r > 0 : \{n \in N | z_n \in K(a,r)\} \text{ er en uendelig mængde}$$

og a vil ikke være et fortætningspunkt hvis

$$\exists r > 0 : \{n \in N | z_n \in K(a,r)\} \text{ er en endelig mængde eller tom}$$

Hvis jeg vælger $r = \frac{1}{2}$ og $a \in \mathbb{R}^2$ vilkårligt, kan der ske to ting

1. Jeg har, at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $d(a, z_n) \geq \frac{1}{2}$, hvilket medfører, at mængden
$$\left\{n \in N | z_n \in K\left(a, \tfrac{1}{2}\right)\right\} = \emptyset$$
Så kan a ikke være et fortætningspunkt for $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.

2. Jeg har, at der eksisterer $i \in \mathbb{N}$ således, at $d(a, z_i) < \frac{1}{2}$, hvilket giver, at $z_i \in K(a, \frac{1}{2})$. Men nu giver (1) og *Kuglelemmaet*, at
$$i \neq j \Rightarrow d(z_i, z_j) \geq 1 \Rightarrow z_j \notin K(z_i, 1) \supseteq K\left(a, \tfrac{1}{2}\right)$$
hvilket medfører, at
$$\left\{n \in N | z_n \in K\left(a, \tfrac{1}{2}\right)\right\} = \{i\}$$
som klart er en endelig mængde, og så kan a ikke være et fortætningspunkt for $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.

Vilkårligt $a \in \mathbb{R}^2$ kan altså ikke være et fortætningspunkt for $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Idet $\mathbb{R}^2$ er en afsluttet mængde, har følgen $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ ingen fortætningspunkter.