Opgave 4.1 i Metriske Rum

Gunnar Restorff

Sætning 1 (Sætning 4.3 i MR) *Lad (M,d) være det metriske produktrum af (M_1,d_1) og (M_2,d_2). Så gælder*

(a) For $G_1 \in \mathcal{G}(M_1)$ og $G_2 \in \mathcal{G}(M_2)$ er $G_1 \times G_2 \in \mathcal{G}(M_1 \times M_2)$.

(b) For $F_1 \in \mathcal{F}(M_1)$ og $F_2 \in \mathcal{F}(M_2)$ er $F_1 \times F_2 \in \mathcal{F}(M_1 \times M_2)$.

(c) For $A_1 \subseteq M_1$ og $A_2 \subseteq M_2$ er $(A_1 \times A_2)^\circ = A_1^\circ \times A_2^\circ$ og $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.

(d) En følge $x_n = (x_{n1}, x_{n2}), n = 1,2,3,\dots$ i $M_1 \times M_2$ konvergerer mod $x = (x_1,x_2)$, hvis og kun hvis $(x_{n1})_{n=1}^\infty$ konvergerer mod x_1 i M_1 og $(x_{n2})_{n=1}^\infty$ konvergerer mod x_2 i M_2.

Bevis: Som bemærket efter sætningen i lærebogen, bygger beviset på følgende observation. Lad $x = (x_1,x_2) \in M$ og $r > 0$ være givne. Da er for $y = (y_1,y_2) \in M$

$$\begin{aligned} y \in K(x,r) &\iff \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\} = d(x,y) < r \iff d_1(x_1,y_1) < r \wedge d_2(x_2,y_2) < r \\ &\iff y_1 \in K_1(x_1,r) \wedge y_2 \in K_2(x_2,r) \iff y \in K_1(x_1,r) \times K_2(x_2,r). \end{aligned}$$

Altså er $K(x,r) = K_1(x_1,r) \times K_2(x_2,r)$.

(c): Lad $A_1 \subseteq M_1$ og $A_2 \subseteq M_2$ være givne. Da er for $x = (x_1,x_2) \in M$

$$\begin{aligned} x \in \overline{A_1} \times \overline{A_2} &\iff x_1 \in \overline{A_1} \wedge x_2 \in \overline{A_2} \\ &\iff (\forall r > 0 : K_1(x_1,r) \cap A_1 \neq \emptyset) \wedge (\forall r > 0 : K_2(x_2,r) \cap A_2 \neq \emptyset) \\ &\overset{(*)}{\iff} \forall r > 0 (K_1(x_1,r) \cap A_1 \neq \emptyset \wedge K_2(x_2,r) \cap A_2 \neq \emptyset) \\ &\iff \forall r > 0 : (K_1(x_1,r) \times K_2(x_2,r)) \cap (A_1 \times A_2) \neq \emptyset \\ &\iff \forall r > 0 : K(x,r) \cap (A_1 \times A_2) \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{A_1 \times A_2}. \end{aligned}$$

Overvej biimplikationen mærket med $(*)$! Altså har vi at $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$. Endvidere er

$$\begin{aligned} \complement(A_1 \times A_2)^\circ &= \overline{\complement(A_1 \times A_2)} = \overline{(\complement A_1 \times M_2) \cup (M_1 \times \complement A_2)} = \overline{\complement A_1 \times M_2} \cup \overline{M_1 \times \complement A_2} \\ &= \left(\overline{\complement A_1} \times \overline{M_2}\right) \cup \left(\overline{M_1} \times \overline{\complement A_2}\right) = \left(\complement A_1^\circ \times M_2\right) \cup \left(M_1 \times \complement A_2^\circ\right) = \complement(A_1^\circ \times A_2^\circ), \end{aligned}$$

hvor vi har brugt opgave 2.5 i **MR**, det lige viste, samt at der om vilkårlige $B_1 \subseteq M_1, B_2 \subseteq M_2$ gælder, at $\complement(B_1 \times B_2) = \left(\complement B_1 \times M_2\right) \cup \left(M_1 \times \complement B_2\right)$ (overvej!). Dvs. at vi har vist, at $(A_1 \times A_2)^\circ = A_1^\circ \times A_2^\circ$.

(a) og (b): Fås direkte af (c). Kan alternativt vises nemt ved brug af kontinuiteten af π_1 og π_2 samt sætning 3.2 og 3.3.

(d): Da projektionsafbildningerne er kontinuerte (se s. 4.3 nederst), følger "kun hvis"-delen umiddelbart af sætning 3.1.

Lad $x_n = (x_{n1}, x_{n2}), n = 1,2,3,\dots$ være en følge i $M_1 \times M_2$, således at $(x_{n1})_{n=1}^\infty$ konvergerer mod x_1 i M_1 og $(x_{n2})_{n=1}^\infty$ konvergerer mod x_2 i M_2. Lad endvidere $x = (x_1,x_2) \in M$. Givet $\varepsilon > 0$ findes $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, så $\forall n \geq N_i : d_i(x_{ni}, x_i) \leq \varepsilon$ for $i = 1,2$. Sæt $N = \max\{N_1,N_2\}$, så er $d(x_n,x) = \max(d_1((x_{n1},x_1), d_2((x_{n2},x_2)) \leq \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Da $\varepsilon > 0$ var vilkårligt, konvergerer $(x_n)_{n=1}^\infty$ altså mod x i M. □

Sætning 2 *Lad (M, d) være det metriske produktrum af (M_1, d_1) og (M_2, d_2), og lad (X, d_X) være et metrisk rum. Lad $f : X \to M_1 \times M_2$, og lad $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i, i = 1, 2$ betgne projektionsafbildningerne (se s. 4.3).*

Da er f kontinuert, hvis og kun hvis $f_1 = \pi_1 \circ f$ og $f_2 = \pi_2 \circ f$ begge er kontinuerte.

Bevis: Sammenlign med sætning 3.12. Antag først at f er kontinuert. Da π_1 og π_2 begge er kontinuerte (se s. 4.3 nederst), følger umiddelbart af sætning 3.5, at $f_1 = \pi_1 \circ f$ og $f_2 = \pi_2 \circ f$ begge er kontinuerte.

Antag nu istedet, at $f_1 = \pi_1 \circ f$ og $f_2 = \pi_2 \circ f$ begge er kontinuerte. Lad $x \in X$ og $\varepsilon > 0$ være givne. Så findes $\delta_1, \delta_2 > 0$ så $f_1(K_X(x, \delta_1)) \subseteq K_1(f_1(x), \varepsilon)$ og $f_2(K_X(x, \delta_2)) \subseteq K_2(f_2(x), \varepsilon)$. Sæt $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, så er

$$f(K_X(x, \delta)) = f_1(K_X(x, \delta)) \times f_2(K_X(x, \delta)) \subseteq K_1(f_1(x), \varepsilon) \times K_2(f_2(x), \varepsilon) = K(f(x), \varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ og $x \in X$ var vilkårlige, er f således kontinuert. $\square$

Sætning 3 *Lad (M, d) være det metriske produktrum af (M_1, d_1) og (M_2, d_2). Da er $O \subseteq M_1 \times M_2$ åben i $M_1 \times M_2$, hvis og kun hvis den er forening af mængder på formen $U \times V$ med $U \in \mathcal{G}(M_1), V \in \mathcal{G}(M_2)$.*

Bevis: Antag at $O = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$, hvor $U_i \in \mathcal{G}(M_1), V_i \in \mathcal{G}(M_2), i \in I$. Da er $U_i \times V_i$ åben i M for hvert $i \in I$ ifølge sætning 4.3(c). Så det følger umiddelbart af sætning 2.6(iii), at O er åben i M.

Antag nu at $O \subseteq M$ er åben i M. For hvert $x = (x_1, x_2) \in O$ findes et $r_x > 0$ så $x \in K_1(x_1, r_x) \times K_2(x_2, r_x) = K(x, r_x) \subseteq O$. Derfor er (overvej!)

$$O = \bigcup_{x = (x_1, x_2) \in O} K_1(x_1, r_x) \times K_2(x_2, r_x).$$

$\square$

Sætning 4 *Lad (M, d) være det metriske produktrum af (M_1, d_1) og (M_2, d_2). Lad endvidere $A_1 \subseteq M_1$ og $A_2 \subseteq M_2$. Så er*

$$\partial(A_1 \times A_2) = (\partial(A_1) \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times \partial(A_2)).$$

Bevis:

$$\begin{aligned}\partial(A_1 \times A_2) &= \overline{A_1 \times A_2} \setminus (A_1 \times A_2)^\circ = (\overline{A_1} \times \overline{A_2}) \setminus (A_1^\circ \times A_2^\circ) \\ &\overset{(*)}{=} ((\overline{A_1} \setminus A_1^\circ) \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times (\overline{A_2} \setminus A_2^\circ)) = (\partial(A_1) \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times \partial(A_2)),\end{aligned}$$

overvej lighedstegnet mærket med $(*)$! $\square$