Kommentarer til opgave 5.5 i Metriske Rum:

Sidste del af opgaven var der meget få, som gennemførte – nemlig at vise sætning 5.8 ud fra resultatet:

Sætning 1 *Lad $(M_1 \times M_2, d)$ være det metriske produktrum af de to metriske rum (M_1, d_1) og (M_2, d_2). Da er $(M_1 \times M_2, d)$ fuldstændigt, hvis og kun hvis (M_1, d_1) og (M_2, d_2) begge er fuldstændige.*

Bevis: Beviset overlades til læseren som en opgave! $\square$

Først viser vi følgende ofte brugte – men sjælden beviste – resultat:

Lemma 2 *Lad A og B være to vilkårlige ikke-tomme mængder og lad $f : A \times B \to \mathbb{R}$ være en vilkårlig funktion. Da er følgende tre størrelser ens:*

$$r = \sup\{f(a,b) \mid a \in A, b \in B\} = \sup_{(a,b)\in A\times B} f(a,b),$$
$$s = \sup\{\sup\{f(a,b) \mid a \in A\} \mid b \in B\} = \sup_{b\in B}\sup_{a\in A} f(a,b), \text{ og}$$
$$t = \sup\{\sup\{f(a,b) \mid b \in B\} \mid a \in A\} = \sup_{a\in A}\sup_{b\in B} f(a,b).$$

Dvs. at $r = s = t$. Det tilsvarende udsagn, hvor alle supremumer er erstattet af infimumer, gælder også.

Bevis: For hvert $a' \in A$ og $b' \in B$ er klart $s \geq \sup_{a\in A} f(a,b') \geq f(a',b')$. Dvs. $s \geq \sup_{(a,b)\in A\times B} f(a,b) = r$. For hvert $b' \in B$ er på den anden side $\sup\{f(a,b') \mid a \in A\} \leq \sup\{f(a,b) \mid a \in A, b \in B\} = r$. Dvs. $s = \sup\{\sup\{f(a,b) \mid a \in A\} \mid b \in B\} \leq r$. Altså er $r = s$. Pga. symmetri er også $r = t$.

Udsagnet vedrørende infimum følger direkte af foregående ved brug af reglen $\inf_{c\in C} c = -\sup_{c\in C}(-c)$ for enhver mængde $C \subseteq \mathbb{R}$ (overvej!). $\square$

Hvis $(M_1, d_1), \ldots, (M_k, d_k)$ er metriske rum, så er det metriske produktrum $(M_1 \times \cdots \times M_k, d)$ givet ved, at $d((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) = \max_{i=1,\ldots k} d_i(x_i, y_i)$. Pga. Lemma 2 ses imidlertid, at dette er præcis det samme som det metriske produktrum af (M', d') og (M'', d''), hvor (M', d') hhv. (M'', d'') er det metriske produkt af $(M_1, d_1), \ldots, (M_\ell, d_\ell)$ hhv. $(M_{\ell+1}, d_{\ell+1}), \ldots, (M_k, d_k)$ hvor $1 \leq \ell \leq k-1$ (overvej!). Der gælder altså en slags associativ lov.

Korollar 3 *Lad $(M_1, d_1), \ldots, (M_k, d_k)$ være metriske rum og lad $(M_1 \times \cdots \times M_k, d)$ betegne det metriske produktrum af disse. Da er $(M_1 \times \cdots \times M_k, d)$ fuldstændigt, hvis og kun hvis alle de metriske rum $(M_1, d_1), \ldots, (M_k, d_k)$ er fuldstændige.*

Bevis: Følger let af Sætning 1 ved induktion (prøv selv!). $\square$

Sætning 4 *Rummet $C([a,b], \mathbb{R}^k)$ er et Banach rum under den uniforme norm $\|\cdot\|_u$, som jo er givet ved $\|f\|_u = \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_\infty$ for $f \in C([a,b], \mathbb{R}^k)$.*

Bevis: Der er faktisk ikke vist i noterne, at $(C([a,b], \mathbb{R}^k), \|\cdot\|_u)$ er et normeret rum. Ved at lave oplagte modifikationer i beviset for at $\mathcal{B}([a,b], \mathbb{R})$ er et normeret rum, ses let, at $\mathcal{B}([a,b], \mathbb{R}^k)$ er et normeret rum. Det ses let, at $C([a,b], \mathbb{R}^k)$ er et underrum heraf (da enhver kontinuert funktion på det kompakte interval $[a,b]$ er begrænset).

Lad $(E, \|\cdot\|_\times)$ være produktrummet af $(C([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ k gange med sig selv. En funktion i $C([a,b], \mathbb{R}^k)$ er fuldstændig fastlagt ved dens koordinatfunktioner. Vi definerer nu en afbildning $\Phi : (E, \|\cdot\|_\times) \to (C([a,b], \mathbb{R}^k), \|\cdot\|_u)$ ved, at $\Phi(f_1, \ldots, f_k)$ er funktionen f, hvis koordinatfunktioner er $\pi_1 \circ f = f_1, \ldots, \pi_k \circ f = f_k$ – denne afbildning Φ er pga. sætning 3.12 veldefineret! Da er Φ surjektiv, thi givet $f \in C([a,b], \mathbb{R}^k)$ er $\Phi(\pi_1 \circ f, \ldots, \pi_k \circ f) = f$ per definition af Φ. Endvidere er Φ en isometri, thi lad $(f_1, \ldots, f_k) \in E$ være givet og sæt $f = \Phi(f_1, \ldots, f_k)$, da er (pga. lemma 2)

$$\|f\|_u = \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \max_{i=1,\ldots,k} |f_i(x)| = \max_{i=1,\ldots,k} \sup_{x\in[a,b]} |f_i(x)| = \max_{i=1,\ldots,k} \|f_i\|_u = \|(f_1, \ldots, f_k)\|_\times.$$

Da $(C([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ er fuldstændigt, følger umiddelbart af korollar 3, at $(E, \|\cdot\|_\times)$ er fuldstændigt. Af sætning 5.6 følger nu, at $(C([a,b], \mathbb{R}^k), \|\cdot\|_u)$ er fuldstændigt – da Φ er en surjektiv isometri (faktisk er Φ en isometrisk isomorfi – dvs. en bijektiv, isometrisk, lineær afbildning).

Ovenstående bevis er ret formelt. Man kunne også bare vha. sætning 3.12 identificere rummene $(C([a,b], \mathbb{R})^k$ og $C([a,b], \mathbb{R}^k)$. Men man skal i hvert fald redegøre for, at de to normer er ens (altså produktnormen og den uniforme norm)! $\square$