Peano's kurve - projekt i Matematik 2AN

1 Indledning

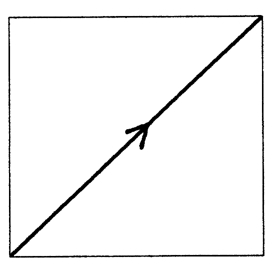
Formålet med dette projekt er at vise, at fuldstændighed af funktionsrummet $C([a,b],\mathbb{R}^k)$ mht. normen $\|\cdot\|_u$ fører til eksistensen af overraskende funktioner. Et eksempel herpå er Peano's kurve, som er en kontinuert og *surjektiv* funktion $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]^2$. Populært sagt kan vi opfatte Peano's kurve som en opskrift på en vandretur af varighed f.eks. en time igennem en kvadratisk park således at man i løbet af denne time besøger *samtlige* punkter i parken! Eller sagt på en anden måde, hvis man skal lede efter en krukke med guld, som er placeret et ukendt sted i Sahara, så skal man blot tage en Peano kurve $\varphi\colon [0,1] \to A$, hvor arealet A passer med Sahara, og så gennemløbe kurven $t \mapsto \varphi(t)$ indenfor et tidsrum, som er i overensstemmelse med ens kondital. Der er dog det problem, at funktionen φ ikke er differentiabel, og at man skal løbe uendelig hurtigt for at kunne følge kurven $t \mapsto \varphi(t)$.

Projektet består dels i at sætte sig ind i Peano's konstruktion (altså at læse og forstå beskrivelsen gengivet nedenfor), og dels i at besvare 8 spørgsmål herom.

2 Kontruktionen af Peano's kurve

Vi konstruerer en følge af kontinuerte, stykkevis lineære funktioner $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots : [0,1] \to [0,1]^2$. Disse funktioner ligger dermed specielt i Banachrummet $C([0,1],\mathbb{R}^2)$. Funktionerne vælges sådan, at følgen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ er Cauchy og derfor konvergent mod en funktion $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R}^2)$.

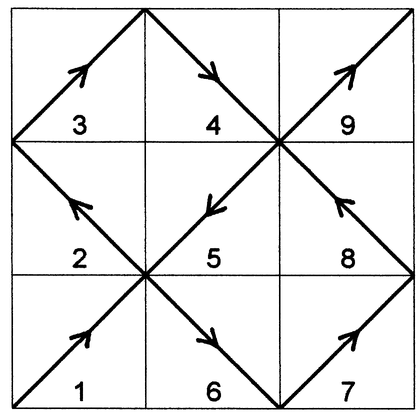
Trin 0: Funktionen $f_0\colon [0,1] \to [0,1]^2$ er givet ved $f_0(t) = (t,t)$. Kurven for f_0 er givet ved:



Figur 1

Kurven gennemløbes med konstant hastighed, og f_0 er således bestemt ved kurven.

Trin 1: Kurven for funktionen $f_1\colon [0,1] \to [0,1]^2$ er givet ved:



Figur 2

Kurven gennemløbes med konstant hastighed, og f_1 er derfor bestemt ved kurven. Enhedskvadratet $[0,1]^2$ er her inddelt i 9 delkvadrater, og hvert delkvadrat gennemløbes diagonalt af kurven for f_1. Vi noterer nedenfor funktionsværdierne for f_1 i "knækpunkterne":

$$f_1(0) = f_0(0) = (0,0),\ f_1(\tfrac{1}{9}) = (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}),\ f_1(\tfrac{2}{9}) = (0,\tfrac{2}{3}),\ f_1(\tfrac{3}{9}) = (\tfrac{1}{3},1),\ f_1(\tfrac{4}{9}) = (\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}),$$
$$f_1(\tfrac{5}{9}) = (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}),\ f_1(\tfrac{6}{9}) = (\tfrac{2}{3},0),\ f_1(\tfrac{7}{9}) = (1,\tfrac{1}{3}),\ f_1(\tfrac{8}{9}) = (\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}),\ f_1(1) = f_0(1) = (1,1).$$

Det er praktisk at indføre en notation for kvadraterne i Figur 2. Hver af de 9 kvadrater er af formen

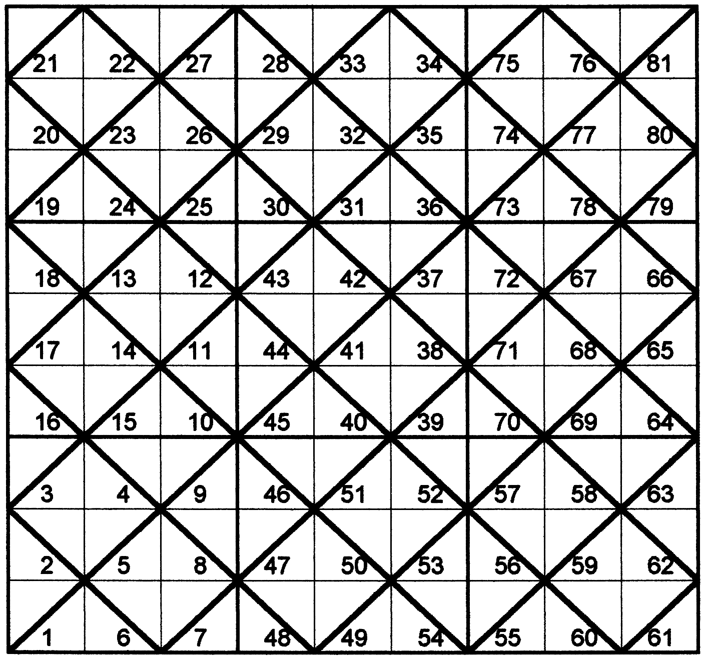
$$K_1^{(m)} = \left[\tfrac{k-1}{3},\tfrac{k}{3}\right] \times \left[\tfrac{l-1}{3},\tfrac{l}{3}\right], \qquad m = 1,2,\ldots,9,$$

for passende $k,l = 1,2,3$ (som afhænger af m). Kvadraterne nummereres som i Figur 2 således, at

$$f_1([\tfrac{m-1}{9},\tfrac{m}{9}]) \subseteq K_1^{(m)} \quad \text{for } m = 1,2,\ldots,9.$$

Spørgsmål 1. Bestem et funktionsudtryk for $f_1(t)$ gyldigt for $t \in [0,1/9]$, hhv. for $t \in [5/9,6/9]$.

Trin 2: Kurven for funktionen $f_2\colon [0,1] \to [0,1]^2$ er i figuren nedenfor trukket op med fed streg (gennemløbsretningen fremgår af nummereringen af delkvadraterne):



Figur 3

Her er enhedskvadratet $[0,1]^2$ inddelt i $81 = 9^2$ delkvadrater, og hvert delkvadrat gennemløbes diagonalt og med konstant hastighed af f_2. Hvert af de 9^2 kvadrater er af formen

$$K_2^{(m)} = \left[\tfrac{k-1}{3^2}, \tfrac{k}{3^2}\right] \times \left[\tfrac{l-1}{3^2}, \tfrac{l}{3^2}\right], \qquad m = 1, 2, \ldots, 9^2,$$

for passende $k, l = 1, 2, \ldots, 3^2$ (som afhænger af m). Delkvadraterne $K_2^{(m)}$ nummereres som i Figur 3 således at

$$f_2([\tfrac{m-1}{9^2}, \tfrac{m}{9^2}]) \subseteq K_2^{(m)} \quad \text{for } m = 1, 2, \ldots, 9^2.$$

Læg mærke til, at $f_2(m/9) = f_1(m/9)$ for $m = 0, 1, \ldots, 9$ (altså f_2 stemmer overens med f_1 på "knækpunkterne" for f_1), og

$$f_2([\tfrac{m-1}{9}, \tfrac{m}{9}]) \subseteq K_1^{(m)} \quad \text{for } m = 1, 2, \ldots, 9.$$

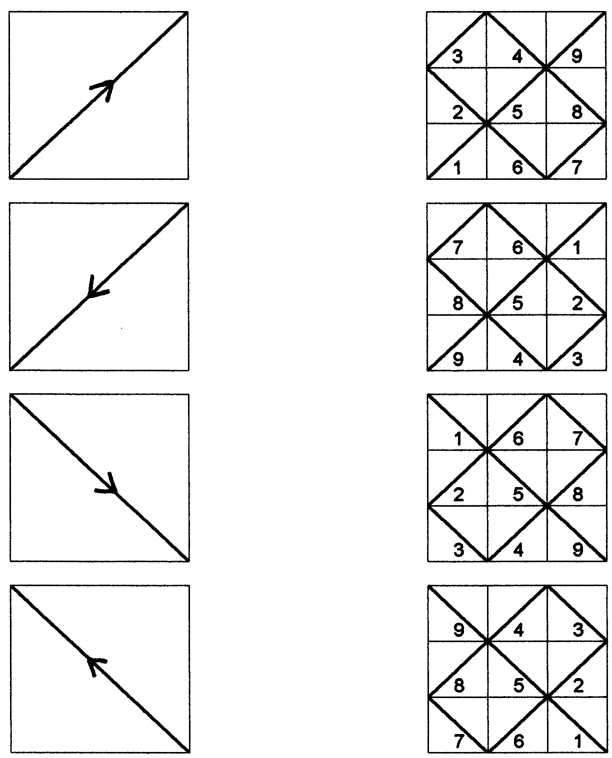
Spørgsmål 2. Find samtlige $t \in [0,1]$ for hvilke $f_2(t) = (\frac{4}{9}, \frac{6}{9})$ hhv. $f_2(t) = (\frac{5}{18}, \frac{7}{18})$.

Trin $(n+1)$**:** Den kontinuerte funktion $f_{n+1}\colon [0,1] \to [0,1]^2$ konstrueres udfra funktionen $f_n\colon [0,1] \to [0,1]^2$ på samme måde, som f_1 fremkommer fra f_0, og som f_2 fremkommer fra f_1. Til den allerede fundne funktion f_n hører en inddeling af kvadratet $[0,1]^2$ i 9^n delkvadrater $K_n^{(m)}$ af formen $[\frac{k-1}{3^n}, \frac{k}{3^n}] \times [\frac{l-1}{3^n}, \frac{l}{3^n}]$ for passende $k, l = 1, 2, \dots, 3^n$. Videre har vi

$$f_n\big([\tfrac{m-1}{9^n}, \tfrac{m}{9^n}]\big) \subseteq K_n^{(m)}, \qquad m = 1, 2, \dots, 9^n.$$

Restriktionen $f_n|_{[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}]}$ er en ret linie (af en af de fire typer gengivet i Figur 4), og vi definerer f_{n+1} på intervallet $[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}]$ ved "Peano kontruktionen" som vist i Figur 4:

$f_n|_{[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}]}$ $\qquad$ $f_{n+1}|_{[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}]}$



Figur 4

I alle fire tilfælde løber både $f_n|_{[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}]}$ og $f_{n+1}|_{[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}]}$ i kvadratet $K_n^{(m)}$, dvs.

$$f_{n+1}\big([\tfrac{m-1}{9^n}, \tfrac{m}{9^n}]\big) \subseteq K_n^{(m)}, \qquad m = 1, 2, \dots, 9^n.$$

Ved kontruktionen af f_{n+1} bliver kvadratet $[0,1]^2$ inddelt i 9^{n+1} delkvadrater $K_{n+1}^{(m)}$ af formen $[\frac{k-1}{3^{n+1}}, \frac{k}{3^{n+1}}] \times [\frac{l-1}{3^{n+1}}, \frac{l}{3^{n+1}}]$ for passende $k, l = 1, 2, \dots, 3^{n+1}$, og

$$f_{n+1}\big([\tfrac{m-1}{9^{n+1}}, \tfrac{m}{9^{n+1}}]\big) \subseteq K_{n+1}^{(m)}, \qquad m = 1, 2, \dots, 9^{n+1}.$$

Spørgsmål 3. Bestem for hvert $n \in \mathbb{N}$ et funktionsudtryk for $f_n(t)$ gyldigt for $t \in [0, 1/9^n]$. Bestem $f_n'(1/(2{\cdot}9^n))$.

Spørgsmål 4. Bestem $f_3(1/7)$. [Vink: Benyt at $1/7 = 1/9 + 2/81 + (5 + 1/7)/729$.]

Opsummering: Hver af funktionerne $f_n\colon [0,1] \to [0,1]^2$ er kontinuerte. For hvert n er kvadratet $[0,1]^2$ inddelt i 9^n delkvadrater $K_n^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots, 9^n$, og der gælder:

(i) $K_n^{(m)} = [\frac{k-1}{3^n}, \frac{k}{3^n}] \times [\frac{l-1}{3^n}, \frac{l}{3^n}]$ for passende $k, l = 1, 2, \ldots, 3^n$ (som afhænger af m)

(ii) $\bigcup_{m=1}^{9^n} K_n^{(m)} = [0,1]^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $f_r\big([\frac{m-1}{9^n}, \frac{m}{9^n}]\big) \subseteq K_n^{(m)}$ for alle $r \geq n$ og for alle $m = 1, 2 \ldots, 9^n$.

Spørgsmålene nedenfor kan (og skal!) besvares ved at benytte opsummeringen ovenfor (uden iøvrigt at henvise til hvordan funktionerne f_n er konstrueret). Rummet $\mathbb{R}^2$ udstyres med normen $\|\cdot\|_\infty$. Bemærk, at $\mathrm{diam}(K_n^{(m)}) = 3^{-n}$ for alle n og m. *Du behøver ikke at vise denne påstand eller nogen af påstandene i opsummeringen.* Vi begynder i Spørgsmål 5 med at definere Peano's funktion φ. Du kan finde en definition af normen $\|\cdot\|_u$ s. 5.4 i "Metriske Rum".

Spørgsmål 5. Vis, f.eks. ved at bruge (i) og (iii) i opsummeringen, at

$$\|f_r(t) - f_n(t)\|_\infty \leq 3^{-n} \quad \text{for alle } t \in [0,1] \text{ og for alle } 1 \leq n < r.$$

Vis herefter, at $\|f_r - f_n\|_u \leq 3^{-n}$ når $r > n$. Vis at følgen $(f_n)_{n=1}^\infty$ er en Cauchyfølge i $C([0,1], \mathbb{R}^2)$. Gør endelig rede for, at der findes en kontinuert funktion $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ så $f_n \to \varphi$ for $n \to \infty$ mht. normen $\|\cdot\|_u$.

Spørgsmål 6. Gør rede for, at $\varphi([0,1])$ er en delmængde af $[0,1]^2$, og at $\varphi([0,1])$ er afsluttet.

I næste spørgsmål vises det, at $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]^2$ er surjektiv.

Spørgsmål 7. Gør rede for, at

$$\varphi\big([\tfrac{m-1}{9^n}, \tfrac{m}{9^n}]\big) \subseteq K_n^{(m)} \quad \text{for alle } n \text{ og for alle } m = 1, 2 \ldots, 9^n.$$

Vis herefter, at hvis $x \in [0,1]^2$, så er

$$d(x, \varphi([0,1])) \leq 3^{-n} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Vis endelig at $x \in \varphi([0,1])$. [Vink: Benyt (ii) i opsummeringen og Opgave 3.6 i "Metriske Rum".]

Spørgsmål 8. Gør rede for, at der for hvert $k \in \mathbb{N}$ findes en kontinuert surjektiv afbildning $\psi_k\colon [0,1]^k \to [0,1]^{k+1}$. Vis herefter, at der for hvert $k \in \mathbb{N}$ findes en kontinuert surjektiv afbildning $\varphi_k\colon [0,1] \to [0,1]^k$.

Den obligatoriske del af projektet ender her! Nysgerrige sjæle kan læse efterskriftet til projektet og/eller prøve kræfter med det ikke-obligatoriske spørgsmål nedenfor (hvor man igen skal kigge på kontruktionen af funktionerne f_n):

Spørgsmål 9. Find $t \in [0,1]$ så $\varphi(t) = (0,1)$ og find $t \in [0,1]$ så $\varphi(t) = (1,0)$. Find fire værdier af $t \in [0,1]$ for hvilke $\varphi(t) = (1/3, 2/3)$.

3 Efterskrift

Det overraskende ved eksistensen af Peano's funktion φ ligger bl.a. i, at mængden $[0,1]^2$ forekommer at være "større" end mængden $[0,1]$. Det er den på en måde også jvf. Sætning 3.1 nedenfor. Endvidere er de to metriske rum $[0,1]$ og $[0,1]^2$ ikke homeomorfe (man kan ikke finde en homeomorfi $g\colon [0,1] \to [0,1]^2$). Dette fører også med sig, at man ikke kan finde en kontinuert surjektiv afbildning $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ som er injektiv!

Sætning 3.1 *Der findes ingen kontinuert injektiv funktion* $h\colon [0,1]^2 \to [0,1]$.

Bevis: Beviset føres indirekte. Antag der findes en kontinuert injektiv funktion $h\colon [0,1]^2 \to [0,1]$. Vi viser, at dette fører til en modstrid. Beviset herfor bygger på et sammenhængsargument (som ikke er dækket af det nuværende pensum i 2AN, men som f.eks. tages op i kurset 3GT.) Mere konkret skal vi bruge, at hvis $C \subseteq [0,1]^2$ er en sammenhængende kurve (f.eks. et liniestykke eller en cirkelbue), så er billedet $h(C)$ et delinterval af $[0,1]$. Vi kan finde to sådanne sammenhængende kurver C_1 og C_2 beliggende i $[0,1]^2$ sådan at $C_1 \cap C_2$ består af netop to punkter. (C_1 kan vælges til at være et liniestykke, og C_2 kan vælges til at være en cirkelbue — prøv selv!) Da h er injektiv gælder

$$h(C_1 \cap C_2) = h(C_1) \cap h(C_2).$$

Mængden på venstre side af lighedstegnet har netop to elementer, og mængden på højre side af lighedstegnet er fællesmængden af to intervaller. Men fællesmængden af to intervaller kan aldrig bestå af netop to elementer (fællesmængden af to intervaller er enten tom, består af netop et element, eller er uendelig). Vi har altså opnået den ønskede modstrid. □

Sætning 3.2 *De metriske rum* $[0,1]$ *og* $[0,1]^2$ *er ikke homeomorfe.*

Bevis: Hvis $[0,1]$ og $[0,1]^2$ var homeomorfe, så ville der eksistere en homeomorfi $g\colon [0,1] \to [0,1]^2$, og $g^{-1}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ ville da være en kontinuert injektiv afbildning. Men sådan en findes ikke ifølge Sætning 3.1. □

Sætning 3.3 *Enhver kontinuert surjektiv afbildning* $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ *må nødvendigvis være ikke-injektiv.*

Bevis: Antag, for at nå en modstrid, at $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ er kontinuert, surjektiv og injektiv. Da er f en kontinuert bijektiv afbildning, og da $[0,1]$ er kompakt giver 5. Hovedsætning om kompakte mængder (Sætning 6.14 i "Metriske Rum"), at f er en homeomorfi. Men en sådan findes ikke ifølge Sætning 3.2. □