Københavns Universitet
Eksamen ved det Naturvidenskabelige Fakultet, vinter 2001–2002

Matematik 2AN — 10. januar 2002

3 timers skriftlig prøve. Alle hjælpemidler er tilladte.
Opgavesættet består af 10 opgaver og er på 3 sider. Opgaverne er vægtet med pointtal, og summen af pointtal er **200**.

Notation: Når intet andet er anført (dvs. i alle opgaver på nær Opgave 4), så udstyres $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ med den sædvanlige metrik $d(x,y) = |x-y|$.

Opgave 1 (45 point). Afgør om nedenstående påstande er sande eller falske. Giv et kort argument i hvert tilfælde. Hvis der optræder et M, så angiver dette et metrisk rum (med metrik d).

(i) Hvis $f\colon \mathbb{R} \to M$ er kontinuert, og hvis F er en afsluttet delmængde af M, så er $f^{-1}(F)$ en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}$.

(ii) For enhver kontinuert funktion $f\colon \mathbb{R} \to M$ gælder det, at $f(\,]0,10[\,)$ er en åben delmængde af M.

(iii) $\mathbb{Q}$ (udstyret med den sædvanlige metrik $d(x,y) = |\,x-y|$) er fuldstændigt.

(iv) Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \sin(x)$ er uniformt kontinuert.

(v) Enhver delmængde af et fuldstændigt metrisk rum er fuldstændigt.

(vi) Der findes et kompakt metrisk rum M og en kontinuert funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$, som er på (= surjektiv).

(vii) Fourierrækken for funktionen $f(x) = \sqrt{\sin(x)^2 + 5}$ konvergerer uniformt imod f.

(viii) Rummet $C([-1,1],\mathbb{C})$ udstyret med den uniforme norm $\|\cdot\|_u$ er fuldstændigt.

(ix) Rummet $C([-1,1],\mathbb{C})$ udstyret med normen $\|\cdot\|_2$ givet ved $\|f\|_2 = \big(\int_{-1}^{1} |f(t)|^2\,dt\big)^{1/2}$ er fuldstændigt.

Svar: (i). *Sand.* (Sætning 3.3 i **MR**). (ii). *Falsk.* Tag $M = \mathbb{R}$ og $f(x) = \sin(x)$. Da er $f(\,]0,10[\,) = [-1,1]$, som ikke er åben. (iii). *Falsk.* Jvf. nederst s. 5.1 i **MR** (eller Sætning 5.3 i **MR**). (iv). *Sand.* Idet $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ har vi $|\sin(x) - \sin(y)| = |\cos(\xi)(x-y)| \le |x-y|$ (ifølge middelværdisætningen). Så $\sin(x)$ er en kontraktion og dermed uniformt kontinuert. (v). *Falsk.* Kun *afsluttede* delmængder af fuldstændige metriske rum er fuldstændige (Sætning 5.3 i **MR**). (vi). *Falsk.* $f(M)$ er kompakt ifølge Sætning 6.9 i **MR**, og da $\mathbb{R}$ ikke er kompakt (da $\mathbb{R}$ ikke er begrænset), kan vi ikke have $f(M) = \mathbb{R}$. (vii). *Sand.* f er 2π-periodisk og C^1. Derfor konvergerer Fourierrækken for f uniformt mod f ifølge Sætning 2.8 i **HR**. (viii). *Sand.* Sætning 5.7 (b) eller Sætning 5.8 i **MR**. (ix). *Falsk.* Funktionsfølgen (f_n) givet ved

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0, \\ nt, & 0 < t \le 1/n, \\ 1, & 1/n < t \le 1, \end{cases}$$

er Cauchy, men ikke konvergent, i $\big(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\big)$.

Opgave 2 (15 point). I denne opgave udstyres $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ med produktmetrikken. Betragt delmængden $A = [0,1[\times]0,1]$ af $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bestem det indre, afslutningen, og randen af A.

Svar: Benyt Sætning 4.3 (c) i **MR**. Vi får da

$$A^\circ = [0,1[^\circ \times]0,1]^\circ =]0,1[\times]0,1[, \qquad \overline{A} = \overline{[0,1[} \times \overline{]0,1]} = [0,1] \times [0,1].$$

Endelig er

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \big(\{0,1\} \times [0,1]\big) \cup \big([0,1] \times \{0,1\}\big).$$

Opgave 3 (15 point). I denne opgave udstyres $\mathbb{R}^2$ med den sædvanlige metrik, dvs. metrikken hørende til normen $\|\cdot\|_2$. Lad F være en delmængde af $\mathbb{R}$, og sæt

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in F\}.$$

Gør rede for, at A er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$, hvis F er afsluttet. [Vink: Kig på funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$.]

Gør dernæst rede for, at A er kompakt, hvis F er kompakt.

Svar: Idet $(x,y) \in f^{-1}(F) \Leftrightarrow f(x,y) \in F \Leftrightarrow x^2+y^2 \in F \Leftrightarrow (x,y) \in A$, har vi $A = f^{-1}(F)$, og derfor er A afsluttet, hvis F er afsluttet (Sætning 3.3 i **MR**).

Hvis F er kompakt, så er F afsluttet og begrænset. Derfor er A afsluttet (ifølge ovenstående). Find R så $F \subseteq]-R,R[$. Da er $A \subseteq K\big((0,0),R\big)$, hvilket viser, at A er begrænset. Alt ialt har vi, at A er kompakt (Sætning 6.6 i **MR**).

Opgave 4 (20 point). Lad $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$d(x,y) = |\, e^{ix} - e^{iy}|.$$

Besvar nedenstående tre spørgsmål. Du skal angive (gerne korte) begrundelser for dine svar.

(i) Er d en metrik på $\mathbb{R}$?

(ii) Er d en metrik på $M =]0,2\pi]$?

(iii) Sæt igen $M =]0, 2\pi]$, og lad $x_n = 1/n \in M$. Er følgen $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergent i (M, d)?

Svar: (i). Nej. $d(0, 2\pi) = |e^0 - e^{2\pi i}| = 0$ og $0 \neq 2\pi$.

(ii). Ja. $d(x, y) \geq 0$ for alle $x, y \in M$ og $d(x, x) = 0$. Hvis $d(x, y) = 0$, så er $e^{ix} = e^{iy}$, men da $t \mapsto e^{it}$ er injektiv på M, så er $x = y$. Det er klart, at $d(x, y) = d(y, x)$. Endelig,

$$d(x, y) = |e^{ix} - e^{iy}| = |e^{ix} - e^{iz} + e^{iz} - e^{iy}| \leq |e^{ix} - e^{iz}| + |e^{iz} - e^{iy}| = d(x, z) + d(z, y).$$

(iii). Ja. $x_n \to 2\pi$ for $n \to \infty$, thi

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, 2\pi) = \lim_{n\to\infty} |e^{i/n} - e^{i2\pi}| = \lim_{n\to\infty} |e^{i/n} - 1| = 0.$$

Opgave 5 (15 point). Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n^3 x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

konvergerer uniformt mod en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, og gør rede for, at f er kontinuert.

Svar: Sæt $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cos(n^3 x)$. Da er $\|f_n\|_u \leq 1/n^2$. Dermed er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_u \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Vi kan derfor benytte majorantkriteriet (Sætning B.2 i **HR**) til at konkludere, at $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ er absolut konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$ (hvorved sumfunktionen $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ er defineret), og at $\sum_{n=1}^N f_n \to f$ uniformt for $N \to \infty$. Da $\sum_{n=1}^N f_n$ er kontinuert for hvert N, følger det af Sætning 3.16 i **MR**, at grænsefunktionen f er kontinuert.

Opgave 6 (15 point). Lad H være et Hilbertrum med ortonormalbasis $(e_n)_{n=1}^\infty$. Gør rede for, at rækken

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} e_n$$

er konvergent i H. Bestem $\|x\|$.

Svar: Sætning 1.10 i **HR** giver, at den uendelige række er konvergent, hvis og kun hvis $\sum_{n=1}^\infty \|\frac{1}{3^n} e_n\|^2 < \infty$. Men

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{3^n} e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{3^n}\big)^2 \|e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{1/9}{1 - 1/9} = 1/8 < \infty.$$

Det følger videre af Sætning 1.10, at

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{3^n} e_n\|^2\Big)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Opgave 7 (25 point). Betragt funktionen $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi/2, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

(i) Bestem Fourierkoefficenterne $c_0(f)$ og $c_1(f)$.

(ii) Gør rede for, at Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ for f konvergerer punktvis mod en funktion $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, og bestem g.

(iii) Bestem $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. [Vink: Spørgsmålet kan besvares uden først at beregne Fourierkoefficienterne $c_n(f)$.]

Svar: (i).

$$\begin{aligned} c_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} 1\,dx = 1/4, \\ c_1(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-ix}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\tfrac{1}{-i}e^{-ix}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{i}{2\pi}\big(e^{-i\pi/2}-1\big) = \frac{i}{2\pi}(-i-1) = \frac{1-i}{2\pi}. \end{aligned}$$

(ii). Benyt Korollar 2.4 i **HR**. Bemærk, at $f(-\pi) = f(\pi)$, så f kan udvides til en 2π-periodisk funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Funktionen f er stykkevist kontinuert: I intervallet $[-\pi,\pi]$ har f diskontinuiteter ved $t = 0$ og $t = \pi/2$, og grænserne

$$\lim_{t\to 0-} f(t) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} f(t) = 1, \quad \lim_{t\to \pi/2-} f(t) = 1, \quad \lim_{t\to \pi/2+} f(t) = 0,$$

findes. Endvidere er f differentiabel (i $[-\pi,\pi]$) med $f'(t) = 0$, bortset fra i punkterne $t = 0$ og $t = \pi/2$, og her haves

$$\lim_{t\to 0+} f'(t) = 0, \quad \lim_{t\to 0-} f'(t) = 0, \quad \lim_{t\to \pi/2+} f'(t) = 0, \quad \lim_{t\to \pi/2-} f'(t) = 0.$$

Som bemærket til forelæsningerne implicerer eksistensen af ovenstående grænser, at grænseværdierne $f'_\pm(0)$ og $f'_\pm(\pi/2)$ findes. Korollar 2.4 giver derfor, at $s_N(f)(t) \to g(t)$ for alle $t \in [-\pi,\pi]$, hvor

$$g(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \le t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & 0 < t < \pi/2, \\ 1/2, & t = \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < t \le \pi. \end{cases}$$

(iii). Vi benytter Parseval's ligning:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} 1\,dx = 1/4.$$

Opgave 8 (15 point). Gør rede for, at differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^4, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

har netop én maximal løsning, som opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 1$. (Løsningen skal ikke bestemmes.)

Svar: Eksistens og entydighed af maximal løsning følger af Sætning 7.12 i **MR**, hvis funktionen $f(t,x) = 1 + x^4$ opfylder en lokal Lipschitz betingelse. Ifølge Lemma 7.13 i **MR** er dette opfyldt, hvis $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kontinuert (klart opfyldt!), og hvis den partielle afledede

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = 4x^3$$

findes og er kontinuert. Dette ses også at være opfyldt.

Opgave 9 (20 point). Lad X og Y være metriske rum, lad $f\colon X \to Y$ være en kontinuert afbildning og udstyr $X \times Y$ med produktmetrikken. Vis at mængden

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

er afsluttet i $X \times Y$.

Svar: Det er ifølge Sætning 2.10 i **MR** nok at vise, at hvis $\big((x_n, y_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ er en følge i $G(f)$, som opfylder $(x_n, y_n) \to (x,y) \in X \times Y$, da vil $(x,y) \in G(f)$.

Da $(x_n, y_n) \in G(f)$, har vi $y_n = f(x_n)$. Af Sætning 4.3 (d) i **MR** har vi videre, at $x_n \to x$ og $f(x_n) \to y$ for $n \to \infty$. Da f er kontinuert, får vi $f(x_n) \to f(x)$ for $n \to \infty$. Men så må $y = f(x)$ (da en følge højst kan have ét grænsepunkt). Dette giver endelig, at $(x,y) = (x, f(x)) \in G(f)$, som ønsket.

Opgave 10 (15 point). Betragt Schwartzfunktionen $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$\psi(x) = xe^{-x^2/2}.$$

Bestem den Fouriertransformerede $\widehat{\psi}(k)$. (Dine mellemregninger skal fremgå af besvarelsen — det er ikke tilstrækkeligt blot at angive svaret med henvisning til et tabelopslag eller en udregning foretaget af din lommeregner.) [Vink: Du må gratis benytte, at $\widehat{\varphi} = \varphi$, hvor $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$.]

Svar: Vi benytter Sætning 2.7 i de supplerende noter "Om Fubinis Sætning og Fouriertransformationen" til at finde

$$\widehat{\psi}(k) = \mathcal{F}(\psi)(k) = \mathcal{F}(x\varphi)(k) = i\mathcal{F}(\varphi)'(k) = i\varphi'(k) = -ike^{-k^2/2}.$$