Københavns Universitet
Eksamen ved det Naturvidenskabelige Fakultet, vinter 2001–2002

Matematik 2AN — 10. januar 2002

3 timers skriftlig prøve. Alle hjælpemidler er tilladte.
Opgavesættet består af 10 opgaver og er på 3 sider. Opgaverne er vægtet med pointtal, og summen af pointtal er **200**.

Notation: Når intet andet er anført (dvs. i alle opgaver på nær Opgave 4), så udstyres $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ med den sædvanlige metrik $d(x,y) = |x-y|$.

Opgave 1 (45 point). Afgør om nedenstående påstande er sande eller falske. Giv et kort argument i hvert tilfælde, gerne i form af en reference til lærebøgerne. Hvis der optræder et M, så angiver dette et metrisk rum (med metrik d).

(i) Hvis $f\colon \mathbb{R} \to M$ er kontinuert, og hvis F er en afsluttet delmængde af M, så er $f^{-1}(F)$ en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}$.

(ii) For enhver kontinuert funktion $f\colon \mathbb{R} \to M$ gælder det, at $f(\,]0,10[\,)$ er en åben delmængde af M.

(iii) $\mathbb{Q}$ (udstyret med den sædvanlige metrik $d(x,y) = |\,x-y|$) er fuldstændigt.

(iv) Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \sin(x)$ er uniformt kontinuert.

(v) Enhver delmængde af et fuldstændigt metrisk rum er fuldstændigt.

(vi) Der findes et kompakt metrisk rum M og en kontinuert funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$, som er på (= surjektiv).

(vii) Fourierrækken for funktionen $f(x) = \sqrt{\sin(x)^2 + 5}$ konvergerer uniformt imod f.

(viii) Rummet $C([-1,1],\mathbb{C})$ udstyret med den uniforme norm $\|\cdot\|_u$ er fuldstændigt.

(ix) Rummet $C([-1,1],\mathbb{C})$ udstyret med normen $\|\cdot\|_2$ givet ved $\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$ er fuldstændigt.

Opgave 2 (15 point). I denne opgave udstyres $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ med produktmetrikken. Betragt delmængden $A = [0, 1[\times]0, 1]$ af $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bestem det indre, afslutningen, og randen af A.

Opgave 3 (15 point). I denne opgave udstyres $\mathbb{R}^2$ med den sædvanlige metrik, dvs. metrikken hørende til normen $\| \cdot \|_2$. Lad F være en delmængde af $\mathbb{R}$, og sæt

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in F\}.$$

Gør rede for, at A er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$, hvis F er afsluttet. [Vink: Kig på funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$.]

Gør dernæst rede for, at A er kompakt, hvis F er kompakt.

Opgave 4 (20 point). Lad $d \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$d(x, y) = |\, e^{ix} - e^{iy}|.$$

Besvar nedenstående tre spørgsmål. Du skal angive (gerne korte) begrundelser for dine svar.

(i) Er d en metrik på $\mathbb{R}$?

(ii) Er d en metrik på $M =]0, 2\pi]$?

(iii) Sæt igen $M =]0, 2\pi]$, og lad $x_n = 1/n \in M$. Er følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent i (M, d)?

Opgave 5 (15 point). Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n^3 x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

konvergerer uniformt mod en funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, og gør rede for, at f er kontinuert.

Opgave 6 (15 point). Lad H være et Hilbertrum med ortonormalbasis $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Gør rede for, at rækken

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} e_n$$

er konvergent i H. Bestem $\|x\|$.

Opgave 7 (25 point). Betragt funktionen $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi/2, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

(i) Bestem Fourierkoefficenterne $c_0(f)$ og $c_1(f)$.

(ii) Gør rede for, at Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ for f konvergerer punktvis mod en funktion $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, og bestem g.

(iii) Bestem $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. [Vink: Spørgsmålet kan besvares uden først at beregne Fourierkoefficienterne $c_n(f)$.]

Opgave 8 (15 point). Gør rede for, at differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^4, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

har netop én maximal løsning, som opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 1$. (Løsningen skal ikke bestemmes.)

Opgave 9 (20 point). Lad X og Y være metriske rum, lad $f\colon X \to Y$ være en kontinuert afbildning og udstyr $X \times Y$ med produktmetrikken. Vis at mængden

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

er afsluttet i $X \times Y$.

Opgave 10 (15 point). Betragt Schwartzfunktionen $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$\psi(x) = xe^{-x^2/2}.$$

Bestem den Fouriertransformerede $\widehat{\psi}(k)$. (Dine mellemregninger skal fremgå af besvarelsen — det er ikke tilstrækkeligt blot at angive svaret med henvisning til et tabelopslag eller en udregning foretaget af din lommeregner.) [Vink: Du må gratis benytte, at $\widehat{\varphi} = \varphi$, hvor $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$.]