

Halvvejstest i 2AN

Besvares på 60 minutter.

Opgave 1. Afgør om nedenstående påstande er sande eller falske. Giv korte begrundelser.

- (i) Alle kompakte metriske rum er fuldstændige.
- (ii) Alle fuldstændige metriske rum er kompakte.
- (iii) Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(t) = t^3$ er uniformt kontinuert.
- (iv) Funktionen $g: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $g(t) = \sqrt[3]{t}$ er uniformt kontinuert.
- (v) Hvis A er en åben delmængde af et metrisk rum M , og B er en afsluttet delmængde af M , så er $A \setminus B$ åben.

Opgave 2. I det metriske rum $\mathbb{R}$, udstyret med den sædvanlige metrik $d(x, y) = |x - y|$, betragtes delmængden

$$M = [-7, 2[\cup \{3\} \cup [5, 10[,$$

som udstyres med metrikken d fra $\mathbb{R}$ ("den inducerede metrik"). I M betragtes delmængden

$$A = [1, 2[\cup \{3\} \cup [5, 6] \subseteq M.$$

Bestem det indre, A° , og afslutningen, $\overline{A}$, af A *relativt til* M .

Opgave 3. Betragt rummet $C([0, 1], \mathbb{R})$ udstyret med den sædvanlige uniforme norm $\|\cdot\|_u$, og lad $f_n \in C([0, 1], \mathbb{R})$ være givet ved

$$f_n(t) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} t^2, \quad t \in [0, 1].$$

Bestem $\|f_{n+1} - f_n\|_u$. Vis herefter, at $(f_n)_{n=1}^\infty$ er en Cauchy følge i $C([0, 1], \mathbb{R})$. Er følgen $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergent? (Grænsen skal i givet fald *ikke* bestemmes.)

Opgave 4. Lad (M, d) være et metrisk rum, og lad K_1 og K_2 være kompakte delmængder af M . Vis at foreningsmængden $K_1 \cup K_2$ er kompakt.