Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

21. august 2001

Mikael Rørdam

Mat 2AN — Analyse – E01 — Ugeseddel nr. 1

Kursets hjemmeside: Den meste information om kurset vil være at finde på kursets hjemmeside `http://www.math.ku.dk/~rordam/2AN.html`, som løbende vil blive opdateret.

Forelæsningerne i uge 36: Her gennemgås §1 i **MR** (Christian Berg: Metriske rum) om metriske og normerede rum.

1. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 38: Opgave 1.3 i **MR**.

Øvelserne i uge 37: Her regnes opgaverne: 1.1, 1.2, 1.4, 1.5 [Vælg $a = 1/6$ og $r = 1/3$ for det metriske rum $[0,1]$, og vælg $a = (0,0)$ og $r = 1$ for det metriske rum $\mathbb{R}^2$ (med tre forskellige metrikker)], 1.6, 1.11† i **MR** og de tre supplerende opgaver nedenfor.

Opgaver mærket med † er særligt udfordrende.

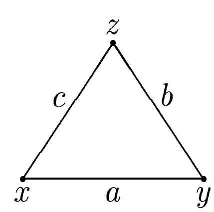
Opgave 1: Lad $X = \{x, y, x\}$ være en mængde med tre punkter, x, y og z.

(i) Gør rede for, at der findes en metrik d på X, som opfylder:

$$d(x,y) = a, \qquad d(y,z) = b, \qquad d(z,x) = c,$$

hvis og kun hvis a, b og c er reelle tal som opfylder

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad a + b \geq c, \quad b + c \geq a, \quad c + a \geq b.$$



(ii) Gør rede for, at der findes en metrik d på X som opfylder $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 3$ og $d(z,x) = c$ hvis og kun hvis $2 \leq c \leq 4$.

(iii) Antag nu, at a, b og c opfylder ulighederne i (i). Vis at der findes tre (indbyrdes forskellige) punkter x_0, y_0 og z_0 i planen $\mathbb{R}^2$ således at

$$\|x_0 - y_0\|_2 = a, \qquad \|y_0 - z_0\|_2 = b, \qquad \|z_0 - x_0\|_2 = c.$$

Opgave 2: Lad X være en mængde, og lad d_1 og d_2 være metrikker på X. Sæt

$$d_3(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}, \qquad d_4(x, y) = \min\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}, \qquad x, y \in X.$$

Vis at d_3 er en metrik på X. Vis ved et eksempel, at d_4 ikke altid er en metrik (benyt f.eks. Opgave 1 til at konstruere et modeksempel).

Opgave 3: Lad $[a, b]$ være et delinterval af den reelle akse $\mathbb{R}$ (og antag $a < b$). Lad $\mathbb{R}^+$ betegne mængden af ikke-negative reelle tal.

(i) Lad $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ være en kontinuert funktion som opfylder $\int_a^b f(x)dx = 0$. Vis at $f(x) = 0$ for alle $x \in [a, b]$. [Vink: Antag der findes $x_0 \in [a, b]$ så $f(x_0) > 0$. Vis at så findes $\varepsilon > 0$ og $\delta > 0$ så $f(x) \geq \varepsilon$ for alle $x \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Benyt dette til at vise, at $\int_a^b f(x)dx > 0$.]

(ii) Lad $C([a, b])$ være vektorrummet af kontinuerte funktioner $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. Gør rede for, at der ved

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$$

defineres en norm på $C([a, b])$. [Vink: Benyt bl.a. spørgsmål (i).]

(iii) Kig nu på tilfældet, hvor $[a, b] = [0, 1]$. Sæt $f_n(t) = t^{1/n}$ og $f(t) = 1$ for $t \in [0, 1]$. Vis at $f_n \to f$ mht. $\| \cdot \|_1$, og at der *ikke* gælder $f_n \to f$ mht. $\| \cdot \|_u$