Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

16. november 2001

Mikael Rørdam

Mat 2AN — Analyse – E01 — Ugeseddel nr. 10

Instruktortræffetid: Ordningen fortsætter semesteret ud: Mandag kl. 9–11 i A107 i ulige uger og tirsdag kl. 15–17 i A106 i lige uger.

Forelæsningerne i uge 45: Her blev resten af §7 om entydighed og eksistens af løsninger til differentialligninger gennemgået med visse overspringelser: Sætning 7.10 og §7.4 er ikke gennemgået og er ikke pensum. Sætning 7.9, Definition 7.11, Sætning 7.12 og Lemma 7.13 *er pensum* (disse sætninger indgår f.eks. i pensum til den skriftlige eksamen), men *beviserne* for disse resultater er ikke pensum. Istedet for beviset for Sætning 7.9 blev beviset for "discount udgaven" Sætning 7.9' (se de supplerende noter nedenfor) gennemgået, og dette bevis *er pensum*. Der fortsattes med Hilbertrum (§1 i Durhuus' bog "Hilbert rum"), hvor vi nåede frem til og uden §1.2.

Hovedemner fra sidste uges forelæsning: Førsteordens differentialligninger (herunder eksempler), løsninger og maximale løsninger, omformulering af differentialligningen til en integralligning, konstruktion af afbildningen T, globale og lokale Lipschitz betingelser for differentialligningen, sammenhæng mellem løsninger til differentialligningen og fixpunkter for T, entydighed og eksistenssætninger (Sætningerne 7.9, 7.9', 7.12 og Lemma 7.13). Komplekse vektorrum, indre produktrum (og eksempler), positiv definit sesquelinearform. Paralellogram- og polariseringsidentiteten (se også Opgave 1 og 2 nedenfor).

Forelæsningerne i uge 46: Der fortsættes i §1 i Hilbertrumbogen, hvor vi nok når frem til §1.5.

10. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 48: Opgave 2 fra 2AN eksamenen juni 1999.

Øvelserne i uge 47: Opgave 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, (1.7), 1.8, (1.10), 1.11, (1.13), Supplerende Opgave 1 nedenfor, og Opgave 1 fra 2AN eksamenen januar 2000. Regn kun Supplerende Opgave 2 til regneøvelserne hvis der er virkelig god tid! Denne opgave er tiltænkt "hjemmesysleri" for særligt interesserede.

Opgaver mærket med † er særligt udfordrende. Opgaver i parantes regnes hvis tiden tillader det.

Besvarelser af gamle eksamensopgaver foreligger ikke fra officiel side, men jeg er villig til at lægge besvarelser udarbejdet af jer på nettet (hvis de foreligger i egnet elektronisk format). Jeg vil først tjekke, at besvarelsen er korrekt!

Opgave 1. Lad $\big(E, (\cdot,\cdot)\big)$ være et indre produktrum (over $\mathbb{C}$) med tilhørende norm $\|x\|^2 = (x,x)$. Vis at $\|\cdot\|$ opfylder paralellogramidentiteten

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \qquad x,y \in E. \tag{$\dagger$}$$

Opgave 2†. Lad $(E, \|\cdot\|)$ være et normeret vektorrum over $\mathbb{C}$, og antag at normen opfylder paralellogramidentiteten (†) i Opgave 1. Vis at der ved

$$(x,y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2\big), \qquad x,y \in E,$$

defineres et indre produkt på E og at $(x,x) = \|x\|^2$. [**Vink:** Eftervis først identiteterne: $(x,x) = \|x\|^2$, $(x,y) = \overline{(y,x)}$, og $(ix,y) = i(x,y)$ for alle $x,y \in E$. Vis herefter:

$$\begin{aligned} \|x+2z\|^2 + \|x\|^2 &= 2\|x+z\|^2 + 2\|z\|^2, \\ \|x-2z\|^2 + \|x\|^2 &= 2\|x-z\|^2 + 2\|z\|^2, \end{aligned}$$

og benyt dette til at konkludere, at $(x,2z) = 2(x,z)$. Vis nu:

$$\begin{aligned} \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 &= \tfrac{1}{2}\|x+y+2z\|^2 + \tfrac{1}{2}\|x-y\|^2, \\ \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 &= \tfrac{1}{2}\|x+y-2z\|^2 + \tfrac{1}{2}\|x-y\|^2, \end{aligned}$$

og benyt dette (og resultatet ovenfor) til at konkludere, at $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ for alle $x,y,z \in E$. Gør rede for, at afbildningen $x \mapsto (x,y)$ er kontinuert for fastholdt $y \in E$, og benyt dette til at vise, at $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ for alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (se først på $\lambda \in \mathbb{Q}$). Vis endelig, at $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ for alle $x,y \in E$ og alle $\lambda \in \mathbb{C}$.]

Supplerende Noter

Beviset for Sætning 7.9 overspringes (og er ikke pensum). Istedet er beviset for nedenstående "discount udgave" af Sætning 7.9 pensum:

Sætning 7.9' *Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$ og lad $f\colon I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ være en kontinuert funktion, som opfylder en global Lipschitz betingelse. Lad $t_0 \in I^\circ$ og $x_0 \in \mathbb{R}^k$ være givet. Det følger, at der findes $\delta > 0$, således at differentialligningen*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{$*$}$$

har en og kun en løsning $\varphi\colon [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^k$ (og $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subseteq I$).

Bevis: Vælg først $\delta_1 > 0$ således at $K_1 = [t_0-\delta_1, t_0+\delta_1] \subseteq I$. Da f er antaget at opfylde en global Lipschitz betingelse findes $c < \infty$ således at

$$\forall t \in K_1 \; \forall x,y \in \mathbb{R}^k : \|f(t,x) - f(t,y)\|_\infty \le c\|x-y\|_\infty.$$

Vælg et $\delta > 0$ som opfylder $\delta \le \delta_1$ og $2\delta c < 1$, og sæt $K = [t_0-\delta, t_0+\delta] \subseteq I$. Da $K \subseteq K_1$ vil $f\colon K \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ opfylde en global Lipschitz betingelse med samme konstant c som ovenfor. Bemærk, at $\ell(K) = (t_0+\delta) - (t_0-\delta) = 2\delta$.

Lad $T\colon C(K,\mathbb{R}^k) \to C(K,\mathbb{R}^k)$ være som i ligning (2) s. 7.2 (hørende til vores differentialligning $(*)$). Da har vi

$$\forall \varphi, \psi \in C(K,\mathbb{R}^k) : \|T(\varphi) - T(\psi)\|_u \le (2\delta c)\|\varphi - \psi\|_u,$$

ifølge Lemma 7.4. Dvs. T er en (ægte) kontraktion (jvf. Definition 7.7). Da $C(K,\mathbb{R}^k)$ er fuldstændig (Sætning 5.8), giver Banach's Fixpunktsætning (Sætning 7.8), at T har et og kun et fixpunkt $\varphi \in C(K,\mathbb{R}^k)$. Dette viser Sætning 7.9', idet $\varphi\colon K \to \mathbb{R}^k$ er en løsning til differentialligningen $(*)$ hvis og kun hvis $T(\varphi) = \varphi$, jvf. Sætning 7.3. $\square$