

Mat 2AN — Analyse — E01 — Ugeseddel nr. 11

Forelæsningerne i uge 46: Vi fortsatte i §1 i Hilbertrum bogen, hvor vi nåede frem en formulering af Sætningerne 1.13, 1.14 og 1.15 i §1.5. (Beviserne for disse sætninger klarer vi i næste uge.)

Hovedemner fra sidste uges forelæsning: Eksemplerne $\ell_2(\mathbb{N})$, som er et Hilbertrum, og $\ell_0(\mathbb{N})$, som er et ikke afsluttet underrum af $\ell_2(\mathbb{N})$, og som ikke er et Hilbertrum. Underrum og afsluttede underrum af Hilbertrum. Ortogonale komplement. Konvergens af uendelige rækker $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (Definition 1.7 og Sætning 1.10), Pythagoras' sætning (Sætning 1.4 og dens uendelige pendant Sætning 1.10), Projektionssætningen (Sætning 1.5, dens uendelige pendant Sætning 1.13, og Sætning 1.15). Ortogonale systemer og ortonormalbaser for Hilbertrum (bl.a. Definition 1.11 og Sætning 1.14).

Forelæsningerne i uge 47: Her læses §1 om Hilbertrum færdigt. Vi fortsætter med en kort gennemgang af Lebesgue integralet og af Hilbertrummet $L_2([a, b])$ (efter supplerende noter. Alternativ læsning: Appendix A i Hilbertrum bogen).

11. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 49: Opgave 2 (a) og (b) fra 2AN eksamenen januar 1998.

Øvelserne i uge 48: Opgave 1.6 og 1.9 (+ evt. andre opgaver fra Ugeseddel 10, som I ikke nåede). Opgave 1 fra 2AN eksamenen januar 1999. Supplerende Opgave 1, 2 og 3. Opgave 1, 2 og 3 i de supplerende noter om Lebesgue integralet. (De tre sidste opgaver kan evt. udskydes til uge 49.)

Opgaver mærket med † er særligt udfordrende. Opgaver i parentes regnes hvis tiden tillader det.

Opgave 1 Lad F være et underrum af et Hilbertrum H . Vis at $\overline{F}$ er et underrum (og dermed et afsluttet underrum) af H .

Opgave 2 Lad $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ være et ortonormalt sæt i et Hilbertrum H . Vis at $\text{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ikke er afsluttet. [Vink: Se på $x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}e_n$.]

Opgave 3 Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge i et (uendelig dimensionalt) Hilbertrum H og lad $x \in H$. Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies \left(\forall y \in H : (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) \right).$$

Kan man omvendt slutte

$$\left(\forall y \in H : (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) \right) \stackrel{?}{\implies} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$