Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

7. december 2001

Mikael Rørdam

Mat 2AN — Analyse – E01 — Ugeseddel nr. 14

Forelæsningerne i uge 49: Her blev §§2.2–2.3 i **HR** om punktvis og uniform konvergens af Fourierrækker gennemgået. Beviserne for Riemann–Lebesgues' Lemma (Sætning 2.1), Dinis test (Sætning 2.2) og Sætning 2.9 blev ikke gennemgået. Disse *beviser* er ikke pensum, men *sætningerne* skal kendes og er pensum. Jeg gennemgik også Appendix B i følgende reviderede form:

Sætning B2. Lad $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge i $\mathcal{B}(M,\mathbb{C})$ og sæt $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Antag at $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_u < \infty$. Da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergent for alle $x \in M$ (hvorved sumfunktionen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er defineret), og $s_N \to f$ uniformt for $N \to \infty$.

Forelæsningerne i uge 50: Jan Philip Solovej holder disse forelæsninger, da jeg er bortrejst til en konference. Han vil fortælle om Fouriertransformationen (efter supplerende noter, som lægges på nettet d. 8/12 (sent), og som uddeles til forelæsningen d. 11/12).

Øvelserne i uge 51: Opgave 6.4, 6.5, 6.8*, 6.9 i **HR** de 2 supplerende opgaver, og eksamensopgaverne Juni 00: opgave 3, og Januar 01: opgave 2. Benyt gerne supplerende opgave 1 til besvarelsen af opgaverne i **HR**. (*) Erstat vinket i Opgave 6.8 med "Benyt inversionsformlen og opgave 6.5 til at vise, at ...".

Opgaver i parantes regnes hvis tiden tillader det.

Opgave 1. Lad $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Vis at

$$\mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)\cos(kx)\,dx,$$

hvis f er *lige* (dvs. hvis $f(-x) = f(-x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$), og at

$$\mathcal{F}(f)(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(kx)\,dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)\sin(kx)\,dx,$$

hvis f er *ulige* (dvs. hvis $f(-x) = -f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$). [Vink: Bemærk først, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx}\,dx.]$$

Opgave 2. Lad $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ være givet. Benyt inversionsformlen til at vise at $\mathcal{F}^2(f)(x) = f(-x)$. Vis herefter, at $\mathcal{F}^4(f) = f$. Sæt

$$f_n = \tfrac{1}{4}\big(f + (-i)^n\mathcal{F}(f) + (-1)^n\mathcal{F}^2(f) + i^n\mathcal{F}^3(f)\big), \qquad n = 0,1,2,3.$$

Vis at $\mathcal{F}(f_n) = i^n f_n$ for $n = 0,1,2,3$, og at $f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$.