Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

7. september 2001
Mikael Rørdam

Mat 2AN — Analyse – E01 — Ugeseddel nr. 2

Forelæsningerne i uge 36: §1 i **MR** om metriske og normerede rum blev gennemgået; dog blev Kuglelemma 1.6 og beviset for Sætning 1.11 udskudt til næste uge.

Hovedemner fra sidste uges forelæsning: Definition af metriske og normerede rum. Bemærk at ethvert normeret rum også er et metrisk rum ved fastsættelsen: $d(x,y) = \|x-y\|$. Eksempler på metriske og normerede rum. Punktfølger i metriske rum (herunder især konvergens). Funktionsrummene $\mathcal{F}(M,\mathbb{R})$ og $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ (og deres komplekse analoger), og sup-normen

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}$$

på $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$. Kugler $K(a,r)$ i metriske rum.

Forelæsningerne i uge 37: Her læses §1 færdigt. Vi fortsætter med en kort gennemgang af nogle mængdeoperationer (beskrevet i de supplerende noter nedenfor), og derefter tager vi fat på §2.

2. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 39: Vis de første 4 identiteter i Opgave 2.5 i **MR** (dvs. (i) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$, (ii) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$, (iii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, (iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.)

Øvelserne i uge 38: Her regnes opgaverne: 2.1, 2.2, 2.5 (den del, som ikke er omfattet af hjemmeopgaven), 2.7, og 2.11† i **MR**. Desuden regnes Opgaven i noterne nedenfor, og der skal gives et bevis for de Morgan's 2. regel. Gennemgå evt. også Eksempel 1–3 i noterne nedenfor. Er der mere tid, så regnes opgave 2.6 (hvis ikke der er tid, så regnes denne opgave næste uge).

Opgaver mærket med † er særligt udfordrende.

Supplerende Noter: Lidt om mængdelære.

Hvis A og B er delmængder af en mængde M, så kan vi danne $A \cup B$ (foreningsmængden), $A \cap B$ (snitmængden), $A \setminus B$ (differensmængden) og $\complement A = M \setminus A$ (komplementærmængden). Disse mængder kan formelt defineres således:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \text{ eller } x \in B, && (1) \\ x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \text{ og } x \in B, && (2) \\ x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \text{ og } x \notin B, && (3) \\ x \in \complement A &\Leftrightarrow x \notin A. && (4) \end{aligned}$$

(I det sidste udsagn antages det, at x ligger i M.) Vi kan også danne foreningen og snittet af uendelig mange delmængder af M. Hvis $A_1, A_2, \ldots$ er en følge af delmængder af M, så defineres

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots,$$

ved

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x \in A_n, \tag{5}$$

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x \in A_n. \tag{6}$$

Mere generelt, hvis I er en vilkårlig mængde, og hvis vi for hvert $i \in I$ har en delmængde A_i af M, så siges $\{A_i\}_{i \in I}$ at være en familie af delmængder af M, og $\bigcup_{i \in I} A_i$ og $\bigcap_{i \in I} A_i$ defineres ved

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i, \tag{7}$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in A_i. \tag{8}$$

Bemærk negationerne til (7) og (8):

$$x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \notin A_i, \tag{9}$$

$$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \notin A_i. \tag{10}$$

Bevisregler: Lad A og B være to delmængder af en mængde M. Da gælder:

- $A \subseteq B$ hvis og kun hvis $x \in A \Rightarrow x \in B$ for alle $x \in M$.
- $A = B$ hvis og kun hvis $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ for alle $x \in M$.
- Det kan endelig bruges, at $A = B$ hvis og kun hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

Bemærkning. Lad $(A_i)_{i \in I}$ være en familie af delmængder af en mængde M og lad B være en delmægnde af M. Da gælder:

$$B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I : B \subseteq A_i, \qquad \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B \iff \forall i \in I : A_i \subseteq B.$$

Eksempel 1. Vi har følgende to identiteter:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -1/n, 1 + 1/n \right[= [0,1], \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1 - 1/n] = \left] 0, 1 \right[.$$

Bevis: Den første påstand kan vises således:

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -1/n, 1 + 1/n \right[&\overset{(6)}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N} : x \in \left] -1/n, 1 + 1/n \right[\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : -1/n < x < 1 + 1/n \\ &\overset{*}{\Leftrightarrow} 0 \leq x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Overvej biimplikationen mærket med $*$. Vis selv den anden påstand.

Eksempel 2. For enhver mængde A har vi $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$. (Overvej selv hvorfor!)

Eksempel 3. Der gælder:

$$[0,4] \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n=1}^{4}]n-1, n[, \qquad \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[\,, \qquad \emptyset = \bigcap_{r > 0}]0, r[.$$

Den mellemste identitet indses ved at bruge Archimedes princip, der implicerer, at der til ethvert reelt tal x findes et (og kun et) helt tal n så $n \leq x < n + 1$. Den tredje identitet kan indses ved at antage $x \in \bigcap_{r>0}]0, r[$ og derefter søge en modstrid!

Opgave. Lad (M, d) være et metrisk rum, og definer for hvert $a \in M$ og for hvert $r > 0$ den *lukkede kugle*

$$\underline{K}(a, r) = \{x \in M \mid d(x, a) \le r\}$$

(jvf. Opgave 2.7 i **MR**). Vis at

$$\underline{K}(a, r) = \bigcap_{s \in \,]r,\infty[} K(a, s), \qquad \bigcup_{s \in \,]0,r[} \underline{K}(a, s) = K(a, r).$$

Sætning — de Morgan's regler. For enhver familie $(A_i)_{i \in I}$ af delmængder af en mængde M gælder:

1. $\complement\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) = \bigcap_{i \in I} \complement A_i$,
2. $\complement\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$.

Bevis: Regel 1 vises nedenfor — beviset for påstand 2 er tilsvarende og overlades til læseren.

$$x \in \complement\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \overset{(9)}{\Leftrightarrow} \forall i \in I : x \notin A_i \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \forall i \in I : x \in \complement A_i \overset{(8)}{\Leftrightarrow} x \in \bigcap_{i \in I} \complement A_i.$$