

Mat 2AN — Analyse — E01 — Ugeseddel nr. 3

Ændring af forelæsningslokale: Torsdag d. 27. september er vi smidt ud af Auditorium 1 (da dette lokale skal bruges til andet formål). Istedet har vi fået Auditorium 2. Husk altså at møde op i Auditorium 2 istedet for Auditorium 1 denne torsdag.

Forelæsningerne i uge 37: §1 i MR (Kuglelemma 1.6 og beviset for Sætning 1.11) blev gennemgået. Herefter blev de supplerende noter om mængdelære fra ugeseddel 2 gennemgået. Vi fortsatte i §2 med åbne og lukkede mængder, frem til og uden §2.3.

Hovedemner fra sidste uges forelæsning: De supplerende noter omhandler især vilkårlige forenings- og snit- (= fælles-) mængde dannelser: $\bigcup_{i \in I} A_i$ og $\bigcap_{i \in I} A_i$. I §2 blev følgende begreber fastlagt: det indre A° , randen ∂A , det ydre $\text{ydre}(A)$, og afslutningen $\overline{A}$ af en delmængde A af et metrisk rum M . En lang række relationer mellem disse mængder og deres komplementer blev gennemgået. En delmængde A af M kaldes *åben* hvis $A = A^\circ$ og A kaldes *afsluttet* (= *lukket*) hvis $A = \overline{A}$. A er åben hvis og kun hvis $\mathbb{C}A$ er afsluttet. A° blev karakteriseret som den største åbne mængde, som er indeholdt i A , og $\overline{A}$ er den mindste afsluttede mængde, som indeholder A . Endvidere er *beviserne* i §2 instruktive og vigtige at lære!!

Forelæsningerne i uge 38: Her læses §2.3 om ækvivalente metrikker. §2.4 bliver nok sprunget over. Vi fortsætter med §3, som handler om kontinuerte afbildninger mellem metriske rum.

3. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 40: Opgave 3.3.

Øvelserne i uge 39: Her regnes opgaverne: 2.3, 2.6, 3.2, 3.6, 3.7, og de fire supplerende opgaver. (Opgave 3.7 og Supplerende opgave 1 kan evt. overspringes, hvis ikke der er tid.)

Supplerende opgave 1: Lad X og Y være metriske rum og lad $f, g: X \rightarrow Y$ være kontinuerte afbildninger. Vis at $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ er en afsluttet delmængde af X . (Benyt dette resultat til at give et nyt bevis for Sætning 3.4.)

Supplerende opgave 2: Lad $f: X \rightarrow Y$ være en kontinuert funktion mellem metriske rum X og Y . Lad A være en delmængde af X og lad $x \in X$. Afgør om:

- (i) $x \in \overline{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$.
- (ii) $f(x) \in \overline{f(A)} \Rightarrow x \in \overline{A}$.
- (iii) $x \in A^\circ \Rightarrow f(x) \in f(A)^\circ$.
- (iv) $f(x) \in f(A)^\circ \Rightarrow x \in A^\circ$.

Supplerende opgave 3: Lad $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (i) Vis at f er kontinuert i hver variabel (dvs. at funktionerne $x \mapsto f(x, y_0)$ og $y \mapsto f(x_0, y)$ er kontinuerte for alle $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$).
- (ii) Find en følge $(z_n)_{n=1}^\infty$ i $\mathbb{R}^2$ således at $z_n \rightarrow (0, 0)$ mens $f(z_n) \nrightarrow f(0, 0)$, og konkluder, at f ikke er kontinuert.

Supplerende opgave 4: Lad (X, d) være et metrisk rum. For hver delmængde A af X defines *indikatorfunktionen* $1_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

- (i) Vis at 1_A er kontinuert i alle punkter x beliggende i $A^\circ \cup \text{ydre}(A)$.
- (ii) Vis at 1_A er (overalt) kontinuert hvis og kun hvis A er *clopen* (= åben og afsluttet).

Repetitionsforløb i Mat1GB og Stat0B. Mat1GB holdet er skemalagt til onsdage kl. 10–12 i Bosch 11 og torsdage kl. 11–13 i A107. Første gang onsdag d. 12. september. Stat0B holdet er skemalagt til tirsdage kl. 12–14 i E35A og torsdage kl. 9–11 i Bosch 2.