Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag 27. september 2001
Mikael Rørdam

Mat 2AN — Analyse – E01 — Ugeseddel nr. 4

Forelæsningerne i uge 38: Vi gennemgik §2.3 om ækvivalente metrikker (dog uden beviset for Sætning 2.15, som overlades til selvstudium). §2.4 er ikke pensum, men kan læses af interesserede studerende — dette emne tages op i kurset 3GT. Vi fortsatte i §3 om kontinuerte afbildninger, hvor jeg nåede frem til og med definitionen af Lipschitz afbildninger. Endvidere blev baggrundsmateriale om billeder og urbilleder gennemgået (se de supplerende noter på denne ugeseddel).

Hovedemner fra sidste uges forelæsning: Begreberne ækvivalent metrik og topologisk egenskab (f.eks. at konvergens og kontinuitet er topologiske egenskaber og ikke afhænger af valget af ækvivalent metrik), normerne $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ og $\|\cdot\|_\infty$ på $\mathbb{R}^n$ inducerer ækvivalente metrikker. Definition og elementære egenskaber af billede $f(A)$ og urbillede $f^{-1}(B)$. Definition af begrebet kontinuitet. Herunder, at kontinuitet generaliserer det kendte begreb fra gymnasiet og Matematik 1. Forskellige ækvivalente formuleringer af kontinuitet: udtrykt ved følger (Sætning 3.1), ved åbne mængder (Sætning 3.2) og ved afsluttede mængder (Sætning 3.3). Lipschitz afbildninger, herunder eksempler og det faktum, at Lipschitz afbildninger alle er kontinuerte.

Forelæsningerne i uge 39: Her læses §3 færdigt. Vi fortsætter i §4.

4. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 41: Supplerende opgave 4.

Øvelserne i uge 40: Her regnes opgaverne 3.5, 3.9, 4.1 (evt. fraregnet sidste spm. vedr. randen af $A_1 \times A_2$), 4.2, 4.3, og supplerende opgave 1, 2 og 3.

Opgaver mærket med † er særligt udfordrende.

Opgave 1 Lad $\mathbb{R}$ være udstyret med den sædvanlige metrik. Betragt delmængden $M' = \{-2\} \cup [0,1[\cup [2,5]$ af $\mathbb{R}$, og betragt delmængden $A = \{-2\} \cup]1/2, 1[$ af M'. Bestem det indre, randen, afslutningen og det ydre af A relativt til M' og relativt til $\mathbb{R}$.

Opgave 2 Lad M' være som i Opgave 1. Gør rede for, at mængderne $\{-2\}$, $[0,1[$ og $[2,5]$ alle clopen (både åbne og afsluttede) relativt til M'.

Opgave 3† Lad M være et metrisk rum og lad M' være en ikke tom delmængde af M. Antag at V' og W' er disjunkte delmængder af M', som er åbne relativt til M'. Vis at der findes disjunkte åbne delmængder V og W af M således at $V' = V \cap M'$ og $W' = W \cap M'$.

Opgave 4 Lad X og Y være metriske rum, og lad $f\colon X \to \mathbb{R}$ og $g\colon Y \to \mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner. Vis at funktionen $F\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ givet ved $F(x,y) = f(x)g(y)$ er kontinuert.

Supplerende Noter: Om billeder og urbilleder

Lad X og Y være mængder, og lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning. Til enhver delmængde A af X defineres *billedet*

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y, \quad \text{dvs.} \quad \boxed{y \in f(A) \iff \exists x \in A : y = f(x)}$$

og til enhver delmængde B af Y defineres *urbilledet*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X, \quad \text{dvs.} \quad \boxed{x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B}$$

(Bemærk, at notationen for urbilledet ikke skal tages til indtægt for, at den *omvendte funktion* f^{-1} findes.)

Om billede og urbillede gælder følgende regler:

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X \implies f(A_1) \subseteq f(A_2) \subseteq Y$.

(ii) $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2) \subseteq X$.

(iii) For alle delmængder $A \subseteq X$ og $B \subseteq Y$ har vi $\boxed{A \subseteq f^{-1}(B) \iff f(A) \subseteq B}$

(iv) Hvis $B \subseteq Y$, da er $\boxed{f^{-1}(\complement B) = \complement\big(f^{-1}(B)\big)}$

(v) Hvis Z er endnu en mængde, så er $\boxed{(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))}$ for alle afbildninger $g\colon Y \to Z$ og alle delmængder C af Z.

Den *sammensatte afbildning* $g \circ f$ er defineret ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Implikationen $B \subseteq f(A) \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq A$ gælder hvis f er *injektiv*, men *ikke generelt*, og implikationen $f^{-1}(B) \subseteq A \Rightarrow B \subseteq f(A)$ gælder hvis f er *surjektiv*, men *ikke generelt*.

Bevis for (iii): "$\Rightarrow$". Antag $A \subseteq f^{-1}(B)$. Det skal vises, at $y \in f(A) \Rightarrow y \in B$. Hvis $y \in f(A)$ da findes $x \in A$ så $y = f(x)$. Nu har vi

$$x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow y \in B,$$

som ønsket.

"$\Leftarrow$". Antag $f(A) \subseteq B$. Så har vi

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B),$$

hvilket viser $A \subseteq f^{-1}(B)$.

Bevis for (iv): $x \in f^{-1}(\complement B) \Leftrightarrow f(x) \in \complement B \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in \complement\big(f^{-1}(B)\big)$.

Bevis for (v): $x \in (g \circ f)^{-1}(C) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in C \Leftrightarrow g(f(x)) \in C \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(C) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Vi har også regler for billedet og urbilledet af forenings- og fællesmængder. I nedenstående er $\{A_i\}_{i \in I}$ en familie af delmængder af X og $\{B_j\}_{j \in J}$ er en familie af delmængder af Y (se de supplerende noter på Ugeseddel 2).

(vi) $\boxed{f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)}$

(vii) $\boxed{f^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)}$

(viii) $\boxed{f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)}$

(ix) $\boxed{f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)}$

Bemærk, at "$\subseteq$" i (ix) kan være en ægte inklusion (tag f.eks. $f(x) = x^2$, $A_1 = [-2,-1]$ og $A_2 = [1,2]$; da er $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$ mens $f(A_1) \cap f(A_2) = [1,4] \cap [1,4] = [1,4]$).

Bevis for (vi) – (ix):

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j \;\Leftrightarrow\; \exists j \in J : f(x) \in B_j \;\Leftrightarrow\; \exists j \in J : x \in f^{-1}(B_j) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j). \\
x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j \;\Leftrightarrow\; \forall j \in J : f(x) \in B_j \;\Leftrightarrow\; \forall j \in J : x \in f^{-1}(B_j) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j). \\
y \in f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i : y = f(x) \;\Leftrightarrow\; \exists i \in I\, \exists x \in A_i : y = f(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists i \in I : y \in f(A_i) \;\Leftrightarrow\; y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i). \\
y \in f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \quad &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \exists x \in X : y = f(x) \;\text{ og }\; x \in \bigcap_{i\in I} A_i \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x \in X : y = f(x) \;\text{ og }\; \forall i \in I : x \in A_i \\
&\overset{(**)}{\Rightarrow} \quad \forall i \in I\; \exists x_i \in A_i : y = f(x_i) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in I : y \in f(A_i) \\
&\Leftrightarrow \quad y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i).
\end{aligned}
$$

Overvej implikationerne mærket med $(*)$ og $(**)$. (Man kan vælge $x_i = x$ for alle $i \in I$ når man skal vise $(**)$.) Overvej hvorfor den modsatte implikation i $(**)$ ikke gælder.