

Mat 2AN — Analyse — E01 — Ugeseddel nr. 5

Instruktortræffetider: Som noget nyt (og som et eksperiment) holder instruktorerne træffetid indtil videre som følger: mandag d. 1/10 kl. 9:15–11 i A107, mandag d. 8/10 kl. 11:15–13 i A104, mandag d. 22/10 kl. 9:15–11 i A107, mandag d. 29/10 kl. 11:15–13 i A104.

Bemandingen vil skifte fra uge til uge. 2AN studerende kan her møde op og stille spørgsmål til opgaver, projekt mm, eller man kan sætte sig for at regne opgaver på egen hånd med hjælp indenfor rækkevidde. Mine træffetider ændres til fredage kl. 10–12.

Forelæsningerne i uge 39: Her blev §3 læst færdigt. Sætning 3.10 og 3.11 blev ikke gennemgået. Dog gennemgik jeg et eksempel (som er indeholdt i Sætning 3.11), som viser, at hvis $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ er givet ved $f(x) = Ax + b$, hvor A er en ortogonal $n \times n$ matrix, da er f en isometri (når $\mathbb{R}^k$ udstyres med den Euklidiske metrik). Herefter blev §4.1 om delrum gennemgået, og vi begyndte på §4.2 om produktrum.

Hovedemner fra sidste uges forelæsning: Eksempler på Lipschitz afbildninger, kontinuitet af afbildninger $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ udtrykt v.h.j.a. koordinatfunktionerne, kontinuitet af regneoperationerne. Den vigtige Sætning 3.16, som siger, at den *uniforme* grænse af en følge af kontinuerte funktioner er kontinuert; samt illustrationer af denne sætning ved eksempler på følger af kontinuerte funktioner, som konvergerer punktvis mod en ikke-kontinuert funktion, og eksemplet med Taylorpolynomier, som konvergerer uniformt mod e^x på et lukket begrænset interval (men ikke på hele $\mathbb{R}$). Metriske delrum (definition) samt en forståelse af, hvornår delmængder af delrummet er åbne hhv. afsluttede (jvf. Sætning 4.1). Sammenhænge mellem kontinuitet af $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ og kontinuitet af restriktions afbildningen $f|_{M'}: M' \rightarrow \mathbb{R}$ (se også Opgave 1 nedenfor). Produktrum (definition og Sætning 4.3).

Forelæsningerne i uge 40: Her læses §4 færdigt. Vi fortsætter med en gennemgang af de reelle tal (dels repetition af materiale fra Matematik 1 og dels noget nyt om limsup og liminf). Der udarbejdes supplerende noter herom, som vil blive uddelt til forelæsnungen tirsdag (og som vil blive lagt på nettet). Måske begynder vi på §5 om fuldstændighed.

5. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 43: Denne opgave stilles på næste ugeseddel!

Øvelserne i uge 41: Her regnes opgaverne 4.4 (kun tilfældet $n = 2$), 4.7, 4.9 og de fem supplerende opgaver.

Opgaver mærket med [†] er særligt udfordrende.

VEND!

Opgave 1

- (i) Lad (M, d) være et metrisk rum og lad M' være en delmængde af M . Antag x_0 tilhører det indre af M' (relativt til M) og at $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ er en funktion, hvorom det vides, at $f|_{M'}: M' \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert i x_0 . Vis at $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert i x_0 .
- (ii) Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion, og antag at $f|_{[-n, n]}: [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert.
- (iii) [†] Giv et eksempel på et metrisk rum M med en voksende følge af delmængder $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$, som opfylder $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, og en funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, således at $f|_{M_n}: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert for alle $n \in \mathbb{N}$, mens $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ikke er kontinuert.

Opgave 2 Betragt rummet $\mathbb{R}^2$ udstyret med normen $\|\cdot\|_{\infty}$. Lad $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Gør rede for at $\|T\| < \infty$ og at T er kontinuert. Prøv også at bestemme $\|T\|$.

Opgave 3 Betragt rummet $E = \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ udstyret med normen $\|\cdot\|_u$. Definer $T: E \rightarrow \mathbb{R}$ ved $T(f) = f(0) + f(1)$. Bestem $\|T\|$.

Opgave 4 For hver af nedenstående følger ønskes $\sup$, $\inf$, $\limsup$, og $\liminf$ bestemt. Endvidere skal der i de tilfælde hvor $\limsup$ hhv. $\liminf$ er et reelt tal (altså ikke ∞ hhv. $-\infty$) findes delfølger af de givne følger, som konvergerer mod $\limsup$ hhv. $\liminf$.

- (i) $42, 7, 7, 7, 7, \dots$,
- (ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$,
- (iii) $2, -1, 3/2, -1/2, 4/3, -1/3, 5/4, -1/4, \dots$,
- (iv) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots$,
- (v) $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots$,
- (vi) $1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, \dots$

Opgave 5 Konstruer en reel talfølge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ som opfylder

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = 25, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 5, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$