

Mat 2AN — Analyse – E01 — Ugeseddel nr. 7

Nyt forelæsningslokale: Fra og med uge 41 flytter vi om tirsdagen over i Auditorium 4. Om torsdagen bliver vi i Auditorium 1.

Forelæsningerne i uge 41: Resten af de supplerende noter om de reelle tal blev gennemgået, og vi fortsatte i §5 om fuldstændighed. Her gennemgik jeg til og med Sætning 5.11 (beviset for 5.11 nåede jeg ikke, men det bliver gennemgået senere). I Sætning 5.10 omtalte jeg kun tilfældet $k = 1$ (men I kan roligt læse det generelle bevis selv). Vi springer over Sætning 5.12 og 5.13 og §5.3.

Hovedemner fra sidste uges forelæsning: Cauchyfølger i metriske rum. Eksempler på ikke-konvergente Cauchyfølger. Fortætningspunkt for en følge i et metrisk rum, herunder Sætning 2.6 og Lemma 2.7 i de supplerende noter. Egenskaber for $\limsup$ og $\liminf$ herunder især Sætning 3.4, som siger, at $\limsup x_n$ er et fortætningspunkt for følgen, hvis $\limsup x_n \in \mathbb{R}$. Bolzano–Weierstrass’ sætning. Begrebet fuldstændighed. Fuldstændighed af $\mathbb{R}$ (Theorem 3.7 i de supplerende noter) og af $\mathbb{R}^k$. Sætning 5.3 om fuldstændighed af delrum. Eksempel 5.5, som viser, at $\mathbb{R}$ kan udstyres med to ækvivalente metrikker d (den sædvanlige) og $d' = \text{dist}$, således, at $(\mathbb{R}, d')$ *ikke* er fuldstændig (mens $(\mathbb{R}, d)$ jo er fuldstændig). Fuldstændighed af $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$, $C_b(M, \mathbb{R})$, $C([a, b], \mathbb{R})$, $C([a, b], \mathbb{R}^k)$, alle udstyret med $\|\cdot\|_u$, og fuldstændighed af $C^1([a, b], \mathbb{R})$, når dette rum udstyres med normen $\|\cdot\|$ defineret i Sætning 5.10 (for $k = 1$).

De supplerende noter “Om de reelle tal” Revideret version blev uddelt til forelæsningerne. Der ligger et restlager ved semesteropslagstavlen overfor biblioteket, og noterne kan endvidere downloades fra kursets hjemmeside.

Forelæsningerne i uge 43: Jeg er bortrejst i denne uge og Niels Jakob Laustsen holder forelæsningerne. Han begynder med at vise Sætning 5.11, og vil derefter gennemgå §6. §6.1 er allerede dækket af de supplerende noter om de reelle tal bortset fra den vigtige Sætning 6.6, som vil blive gennemgået.

6. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 44: Opgave 5.5

7. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 45: Opgave 6.2 spm. (1) og (2).

Øvelserne i uge 43 og 44: Her regnes opgaverne 5.3, 5.4, 5.10, 6.1, 6.3, 6.5, 6.6, 6.7, 6.11 og de fem supplerende opgaver. Regn også spm. (3) og (4) i opgave 6.2.

Projekt i 2AN: Projektet blev uddelt til forelæsningen d. 11/10. Ekstra kopier kan afhentes ved semesteropslagstavlen overfor biblioteket eller downloades fra kursets hjemmeside. Afleveringsfrist: til din klassetime i uge 46.

Instruktortræffetider: Mandag d. 22/10 kl. 9:15–11 i A107, mandag d. 29/10 kl. 11:15–13 i A104.

Bemandingen vil skifte fra uge til uge. 2AN studerende kan her møde op og stille spørgsmål til opgaver, projekt mm, eller man kan sætte sig for at regne opgaver på egen hånd med hjælp indenfor rækkevidde.

Opgave 1. Afgør hvilke af følgende rum er fuldstændige:

- (i) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ (udstyret med $\| \cdot \|_\infty$).
- (ii) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ (udstyret med $\| \cdot \|_\infty$).
- (iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ og } y \geq 1/x\}$ (udstyret med $\| \cdot \|_\infty$).
- (iv) Mængden af kontinuerte funktioner $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder $f(0) = 0$ (udstyret med $\| \cdot \|_u$).
- (v) Mængden af kontinuerte funktioner $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, som er differentiable i punktet $t = \pi$ (udstyret med $\| \cdot \|_u$).

Opgave 2. Lad E være et vektorrum, og lad $\| \cdot \|_1$ og $\| \cdot \|_2$ være to ækvivalente normer på E . Vis at der gælder:

$$(E, \| \cdot \|_1) \text{ er fuldstændig} \iff (E, \| \cdot \|_2) \text{ er fuldstændig}.$$

(Du bedes altså om at bevise påstanden først i §5.2.)

Opgave 3. Lad (X, d) og (Y, d) være metriske rum og lad $f: X \rightarrow Y$ være en kontinuert afbildning.

- (i) Lad $(x_n)_{n=1}^\infty$ være en Cauchyfølge i X . Kan man slutte, at $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ er en Cauchyfølge i Y ?
- (ii) Antag at X er fuldstændig. Kan man slutte, at $f(X)$ er fuldstændig?

Besvar (i) og (ii) når det antages, at f er en Lipschitz afbildning.

Opgave 4 nedenfor er en "discount-udgave" af Opgave 5.2 i "Metriske Rum" om fuldstændiggørelse af metriske rum. Man kan ved hjælp af et maximalitetsargument benytte egenskab (iii) i Opgave 5 til at vise eksistensen af fuldstændiggørelsen, men det er ikke en del af opgaven. Opgave 4 og 5 bedes besvaret uden at forudsætte eksistens af fuldstændiggørelser.

Opgave 4. Lad (M, d) være et metrisk rum og lad $(x_n)_{n=1}^\infty$ være en ikke-konvergent Cauchyfølge i M .

- (i) Vis at det for hvert $x \in M$ gælder, at følgen $(d(x, x_n))_{n=1}^\infty$ er Cauchy og dermed konvergent i $\mathbb{R}$.

Tag et element a , som ikke ligger i M , og sæt $M_1 = M \cup \{a\}$. Definer $d_1: M_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$d_1(x, y) = d(x, y), \quad d_1(x, a) = d_1(a, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n), \quad d_1(a, a) = 0, \quad x, y \in M.$$

- (ii) Vis at $d_1(x, a) > 0$ for alle $x \in M$. [Vink: Antag $d_1(x, a) = 0$ og benyt dette til at konkludere, at $x_n \rightarrow x$ for $n \rightarrow \infty$.]
- (iii) Vis at d_1 er en metrik på M_1 . [Når trekantsuligheden skal vises må du “nøjes” med at vise følgende to tilfælde: $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$ og $d(x, a) \leq d(x, z) + d(z, a)$, hvor $x, y, z \in M$.]
- (iv) Vis at $x_n \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$ i M_1 .
- (v) Vis at M er tæt i M_1 .

Opgave 4 viser dermed, at enhver Cauchyfølge faktisk er konvergent, hvis vi vel at mærke har lov til at udvide det givne metriske rum.

I ånden af Opgave 4, og for bedre at kunne formulere Opgave 5 nedenfor, er det praktisk at indføre følgende:

Definition Givet et metrisk rum (M, d) . Et metrisk rum (M', d') kaldes en *udvidelse* af (M, d) , hvis $M \subseteq M'$ og hvis $d'(x, y) = d(x, y)$ for alle $x, y \in M$.

Bemærk, at det metriske rum M_1 i Opgave 4 er en udvidelse af det metriske rum M .

Opgave 5. Vis at følgende tre betingelser for et metrisk rum (M, d) er ækvivalente:

- (i) M er fuldstændig.
- (ii) For enhver udvidelse M' af M gælder, at M er en afsluttet delmængde af M' .
- (iii) For enhver udvidelse M' af M har vi

$$M \text{ er tæt i } M' \implies M = M'.$$

[Vink: Vis (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii), og non (i) $\Rightarrow$ non (iii), og benyt Opgave 4 til at vise sidste implikation.]