

Mat 2AN — Analyse — E01 — Ugeseddel nr. 8

Forelæsningserne i uge 43: Niels Jakob Laustsen holdt disse forelæsninger i mit fravær. Her blev Sætning 5.11 vist (hængeparti fra før efterårsferien). Der fortsattes med Sætning 6.6 (resten af §6.1 er dækket af de supplerende noter om de reelle tal). Herefter blev §6.2 (5 hovedsætninger om kompakte mængder) og §6.4 (overdækningssætningen) gennemgået. Endelig blev §6.3 om ækvivalens af normer på $\mathbb{R}^k$ gennemgået (i kursorisk tempo!).

Hovedemner fra sidste uges forelæsning: Begrebet kompakthed (defineret v.h.j.a. eksistens af fortætningspunkt for følger). Beskrivelse af kompakte delmængder af $\mathbb{R}^k$ (Sætning 6.6). Fem hovedsætninger om kompakte mængder (kompakthed af $f(K)$, største og mindsteværdi, beskrivelse af kompakte delmængder af kompakte mængder, produktet af to kompakte mængder, kontinuerte bijektive afbildninger $f: K \rightarrow Y$ er automatisk åbne). Den vigtige (og ikke helt nemme!) overdækningssætning (Sætning 6.17), som giver en ækvivalent definition af begrebet kompakthed. Ækvivalens af normer på $\mathbb{R}^k$.

Forelæsningserne i uge 44: Her vil §6.4 om uniform kontinuitet blive gennemgået. Der fortsættes med et bevis for, at alle kontinuerte funktioner på et lukket begrænset interval er Riemann integrable (efter supplerende noter). Endelig gennemgås §7.2 (Banach's fixpunktsætning).

Gamle eksamensopgaver i 2AN kan nu downloades fra 2AN's hjemmeside, med angivelse af hvilke af de gamle opgaver, som er omfattet af det nuværende pensum, og hvilke opgaver, der er dækket af allerede gennemgået pensum.

8. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 46: Opgave 4 fra 2AN eksamenen januar 2001.

Øvelserne i uge 45: 6.8, 6.11*, 6.12[†], (6.13), 7.1, 7.2 og de fem supplerende opgave.

Opgave 6.11 blev ved en fejltagelse stillet på Ugeseddel 7, men den hører rettelig hjemme efter §6.5. Opgaver mærket med [†] er særligt udfordrende.

Opgave 1: Vis at funktionen $f_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f_0(x) = \sqrt{x}$ er uniformt kontinuert. Er f_0 en Lipschitz afbildning? Vis herefter, at funktionen $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ givet ved $f(x) = \sqrt{x}$ er uniformt kontinuert.

Definition Et metrisk rum (M, d) kaldes *totalt begrænset* hvis der for hvert $r > 0$ findes endelig mange punkter $x_1, x_2, \dots, x_n$ i M således at

$$M = K(x_1, r) \cup K(x_2, r) \cup \dots \cup K(x_n, r).$$

Opgave 2 Vis at ethvert kompakt metrisk rum er totalt begrænset og fuldstændigt. Vis omvendt, at ethvert totalt begrænset og fuldstændigt metrisk rum er kompakt. [Vink: Du må til besvarelsen af sidste spørgsmål bruge, at et metrisk rum (M, d) er totalt begrænset hvis og kun hvis enhver følge (x_n) i M har en delfølge, som er Cauchy.]

Opgave 3 Lad (M, d) være et metrisk rum, som indeholder en følge $(x_n)_{n=1}^\infty$ der opfylder $d(x_n, x_m) \geq 1$ for alle $n, m \in \mathbb{N}$ med $n \neq m$. Vis at M ikke er totalt begrænset og dermed ikke kompakt.

Lad M være mængden af funktioner $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ som opfylder $\|f\|_u \leq 1$, og udstyr M med metrikken $d(f, g) = \|f - g\|_u$. Gør rede for, at M er fuldstændig. Vis at M ikke er totalt begrænset (f.eks. ved at finde en følge $(f_n)_{n=1}^\infty$ i M som opfylder $d(f_n, f_m) \geq 1$ for alle $n \neq m$). Konkluder, at M ikke er kompakt.

Opgave 4 Lad $f: X \rightarrow Y$ være en afbildning mellem metriske rum X og Y . Vis at f er uniformt kontinuert hvis og kun hvis det for alle par af følger $(x_n)_{n=1}^\infty$ og $(x'_n)_{n=1}^\infty$ i X gælder

$$d_X(x_n, x'_n) \rightarrow 0 \implies d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \rightarrow 0.$$

Opgave 5 Lad (M, d) være et metrisk rum, og lad $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ være uniformt kontinuerte funktioner. Vis at $f + g$ er uniformt kontinuert. Er $f \cdot g$ uniformt kontinuert?

Projekt i 2AN: Projektet blev uddelt til forelæsningen d. 11/10. Ekstra kopier kan afhentes ved semesteropslagstavlen overfor biblioteket eller downloades fra kursets hjemmeside. Afleveringsfrist: til din klassesstime i uge 46.