

Mat 2AN — Analyse – E01 — Ugeseddel nr. 9

Instruktortræffetid: Ordningen fortsætter semesteret ud: Hver mandag kl. 9–11 i A107 i ulige uger og kl. 11–13 i A104 i lige uger.

Forelæsningerne i uge 44: Her blev §6.4 om uniform kontinuitet gennemgået. Læs selv Sætning 6.23. Herefter blev supplerende noter om Riemann integralet og et bevis for, at alle kontinuerte funktioner på et lukket begrænset interval er Riemann integrable gennemgået. Endelig blev §7.2 om Banach's fixpunktsætning gennemgået.

Hovedemner fra sidste uges forelæsning: Definition af uniform kontinuitet. Sammenhæng mellem Lipschitz kontinuitet, uniform kontinuitet og kontinuitet. Alle kontinuerte funktioner fra en kompakt mængde er uniformt kontinuerte (Sætning 6.20). Udvidelse af uniformt kontinuert afbildninger (defineret på tætte delmængder) (Sætning 6.21). Kontinuerte funktioner $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er uniformt kontinuerte og begrænsede og derfor Riemann integrable (supplerende noter). Fixpunkter, (ægte) kontraktioner, Banach's fixpunktsætning.

Forelæsningerne i uge 45: Her gennemgås sætningen om entydighed og eksistens af løsninger til differentialligninger (§7 fra regnet §7.2, som vi allerede har gennemgået). I får en “discount udgave” af Sætning 7.9 (hvor det vises, at der altid findes *lokale* løsninger). Resten af § 7.3 bliver omtalt kursorisk (detaljer følger i næste ugeseddel). Der fortsættes med Hilbertrum (§1 i Durhuus' bog “Hilbert rum”).

9. obligatoriske hjemmeopgave — afleveres i uge 47: Opgave 1 fra 2AN eksamenen januar 1997.

Øvelserne i uge 46: Der vil her blive stillet en “mini-eksamen”, og ca. halvdelen af øvelsestiden vil medgå hertil. I resten af tiden regnes opgaverne: 7.5, 7.6, 7.7, Opgave 2 fra 2AN eksamenen januar 2000, supplerende opgave 1 og evt. også supplerende opgave 2.

Opgaver mærket med [†] er særligt udfordrende.

Opgave 1 Lad (X, d) være et kompakt metrisk rum, og lad A være en (ikke-tom) delmængde af X . Vis at enhver uniformt kontinuert funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ er begrænset. Kan man slutte, at enhver kontinuert funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ er begrænset?

Opgave 2[†] Vis påstanden fra Opgave 2 på Ugeseddel 8: *Enhver følge i et totalt begrænset metrisk rum (M, d) har en delfølge, som er Cauchy.* [Vink: Bemærk først, at enhver delmængde af M er totalt begrænset. Lad $(x_n)_{n=1}^\infty$ være en følge i M . Find delmængder $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ af M således at $\text{diam}(A_n) \leq 1/n$ og således at $x_k \in A_n$ for uendeligt mange k (for hvert $n \in \mathbb{N}$). Konstruer herefter en Cauchy delfølge $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$.]