3MI-eksamen — Forårspensum — 11. juni 1999

Opgave 1 — stilopgave (100 point)

Formuler og bevis Fischer's fuldstændighedssætning

For at komme godt igang med beviset for Fischer's sætning, oplyses det, at man begynder med en følge $g_k \in \mathcal{L}_p$, hvorom det gælder, at $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty$. Undervejs i beviset får man brug for at kigge på funktionen

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|.$$

Man kan endvidere gratis benytte Sætning 7.10, som siger følgende:

Lad $f_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, $n = 1, 2, \ldots$, og lad f være en målelig funktion så $\lim_n f_n(x) = f(x)$ for μ-næsten alle $x \in X$. Hvis der findes $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int g^p d\mu < \infty$, — (vi regner $\infty^p = \infty$) —, således at $|f_n| \leq g$ μ-n.o. for ethvert $n \in \mathbb{N}$, da er $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

Et godt råd: Med til beviset for fuldstændighedssætningen hører Sætning 7.16, som udtaler sig om fuldstændighed og absolut konvergente rækker. Din besvarelse bør indeholde en formulering af denne sætning *men udskyd beviset for Sætning 7.16 til sidst*

Opgave 2 (5 point) Giv tre forskellige eksempler på σ-algebraer på den reelle akse $\mathbb{R}$.

Opgave 3 (15 point) Sæt

$$g(t) = \int_0^1 \sin(x^2 + t^2)dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Gør rede for, at g er kontinuert og differentiabel, og at

$$g'(t) = \int_0^1 2t\cos(x^2 + t^2)dx.$$

Opgave 4 (10 point) Gør omhyggeligt rede for, at

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\sqrt{xy + x})dx\right)dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\sqrt{xy + x})dy\right)dx.$$

Opgave 5 (10 point) Bestem

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1/2)^n 1_{[n,n+1]} dm.$$

Der skal argumenteres omhyggeligt.

Opgave 6 (15 point) Betragt det målbare rum $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Lad μ være tællemålet på $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$, og lad ε_n være Diracmålet i n på $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Gør rede for, at $\mu + \varepsilon_2 + \varepsilon_4$ er et mål på $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Bestem

$$\int_{\mathbb{N}} f d(\mu + \varepsilon_2 + \varepsilon_4),$$

hvor $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ er givet ved $f(n) = 2^{-n}$.

Opgave 7 (15 point) Betragt målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), m)$. Sæt $f_n = n^2 1_{[n,n+n^{-5}]}$.

(i) Gør rede for, at $f_n \to 0$ punktvis overalt.

(ii) For hvilke p, $1 \leq p < \infty$, gælder $f_n \to 0$ i p-middel?

Opgave 8 (10 point) Gør omhyggeligt rede for, at

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \cos(\sqrt{x^2+n^2}) dx = 0.$$

Opgave 9 (20 point) Betragt delmængden E af $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}.$$

(i) Gør rede for, at E er en Borelmængde.

(ii) Bestem snittet E_x for alle x i $\mathbb{R}$.

(iii) Idet m som sædvanligt angiver Lebesguemålet på $\mathbb{R}$ og $\varepsilon_{1/2}$ er Diracmålet i $1/2$, ønskes $(\varepsilon_{1/2} \otimes m)(E)$ bestemt.