

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

Obligatorisk hjemmeopgave i matematik
21. november – 5. december 1996

Opgaven består af nedenstående 7 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige pointtal. Alle hjælpemidler er tilladte. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Opgavebesvarelsen må ikke overstige 30 sider.

Besvarelsen underskrives af eksaminanden og afleveres i 2 eksemplarer inden torsdag den 5. december 1996 kl. 12.

Opgave 1 (Vægt 15%)

a) Begrund for hver af nedenstående 3 rækker, at den er konvergent.

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(2)\ln(3)\cdots\ln(n)}{n!}.$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{2^n}.$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^{\frac{1}{n}}) \sin(\frac{1}{n}).$

b) Find en majorant for summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^{\frac{1}{n}}) \sin(\frac{1}{n}).$

Opgave 2 (Vægt 10%)

Find de komplekse løsninger til ligningerne

a) $z^2 + 10z + 41 = 0.$

b) $z^6 = -64.$

Løsningerne ønskes angivet eksakt og på formen $a + ib$.

Opgave 3 (Vægt 10%)

Lad A være den delmængde af $\mathbb{R}^3$, der er bestemt ved

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \text{ og } z \geq 0 \text{ og } x + z \leq 4\}.$$

- a) Tegn en skitse af A .
- b) Begrund, at A er kompakt.

Opgave 4 (Vægt 15%)

Lad funktionen $F : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2x_3 - x_4x_5x_6 \\ x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 - 4 \\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_4^2 + \frac{3}{2}x_5^2 + 2x_6^2 \end{pmatrix}.$$

- a) Begrund, at ligningen $F(\mathbf{x}) = 0$ fastlægger en differentiabel funktion $G = (g_1, g_2, g_3)$ defineret på en omegn U af punktet $(1, 1, 1)$ i $\mathbb{R}^3$ og med værdier i $\mathbb{R}^3$ således at $G(1, 1, 1) = (2, 1, 1)$ og

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in U : F(x_1, x_2, x_3, g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3), g_3(x_1, x_2, x_3)) = 0.$$

- b) Bestem Jacobimatricen $G'(1, 1, 1)$.
- c) Lad $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ være givet som

$$h(y_1, y_2, y_3) = y_1 - y_2^2 - y_3^3,$$

og lad $k : U \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $k = h \circ G$. Beregn den retningsafledede af k i punktet $(1, 1, 1)$ efter retningen $(1, -2, 0)$.

Opgave 5 (Vægt 20%)

- a) Minimer $f_0(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 + 2x_3$ under bibetingelserne

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 \leq 8 \text{ og } x_1 + x_2 \geq 1 \text{ og } x_1 - x_2 \geq 1.$$

- b) Vis, at funktionen $\sin((2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 + 2x_3)/25)$ har minimum i samme punkt som f_0 under de samme bibetingelser.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (Vægt 10%)

a) Lad C_1 og C_2 være de lukkede konvekse delmængder af $\mathbb{R}^2$, som er givet ved

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ og } x^2 - y^2 \geq 1\}.$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ og } y^2 - x^2 \geq 1\}.$$

Find en hyperplan $H(\mathbf{u}, \alpha)$ som separerer C_1 og C_2 .

b) Lad C_1 og C_2 være de åbne kugler i $\mathbb{R}^3$, givet ved

$$C_1 = K((-1, -1, 0), 1)$$

$$C_2 = K((0, 1, 2), 1).$$

Begrund, at C_1 og C_2 er disjunkte og konvekse.

Find en separerende hyperplan $H(\mathbf{u}, \alpha)$ som opfylder

$$\sup\{\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_1 \in C_1\} < \alpha < \inf\{\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{c}_2 \in C_2\}.$$

Opgave 7 (Vægt 20%)

Der er givet et standard minimeringsproblem (P)

$$(P) \quad \text{Minimer } x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$$

under bibetingelserne

$$\begin{aligned} -6x_1 - x_2 + 4x_3 - 4x_4 &\geq 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 &\geq 0 \\ 4x_1 - x_3 - 3x_4 &\geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

a) Opskriv det duale problem (P*).

b) Begrund, at (P) og (P*) begge har optimale løsninger.

c) Opskriv det til (P) hørende kanoniske minimeringsproblem.

d) Løs (P) og (P*).