Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, august 1998

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

Obligatorisk hjemmeopgave i matematik
28. juli – 11. august 1998

Opgaven består af nedenstående 6 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige pointtal. Alle hjælpemidler er tilladte. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Opgavebesvarelsen må ikke overstige 30 sider.

Besvarelsen underskrives af eksaminanden og afleveres i 2 eksemplarer inden den 11. august 1998 kl. 12.

Opgave 1 (Vægt 15%)

i) Lad a være et ikke negativt reelt tal. Der er givet 3 rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{n})^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)a^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(n!)a^n.$$

Find for hver række mængden af de reelle tal a for hvilke rækken er konvergent.

ii) Lad a_1 være et reelt tal større end 1. Definer successivt $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \sqrt{a_n})$ for $n \geq 1$. Begrund, at $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en konvergent talfølge og bestem dens grænseværdi.

Opgave 2 (Vægt 15%)

Løs ligningen

$$z^6 - 2z^5 + 3z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 8z + 4 = 0\,.$$

Løsningerne bedes angivet på formen $z = a + ib$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt 10%)

Der er givet en delmængde M af $\mathbb{R}^3$ ved ulighederne

$$\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \in M \Leftrightarrow y^2 - 2y + z^2 - 2z + 1 \leq 0 \text{ og } x^2 - 3x \leq 0\,.$$

i) Tegn en skitse af M.

ii) Begrund, at M er kompakt.

iii) Find et indre punkt i M og begrund ud fra definitionen af et indre punkt, at det valgte punkt er indre.

Opgave 4 (Vægt 20%)

Der er givet en funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$F(x,y,u,v) = (\sin(u^2v^2 - x + y) + (1+u)^4 - 1\,,\ e^{xyuv} - x^2)\,.$$

i) Begrund, at der findes en omegn W af $(1,1)$ i $\mathbb{R}^2$ og en differentiabel funktion G defineret på W med værdier i $\mathbb{R}^2$ således at for $G = (g_1, g_2)$ gælder

$$G(1,1) = (g_1(1,1)\,,\ g_2(1,1)) = (0,1) \text{ og}$$
$$\forall(x,y) \in W : F(x,y,g_1(x,y)\,,\ g_2(x,y)) = (0,0)\,.$$

ii) Bestem Jacobimatricen for G i punktet $(1,1)$.

Lad $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$H(s,t) = (\cos(s^2t^2) + \sin(t)\,,\ e^{s^2+t^2} + s)\,.$$

iii) Vis, at $H(0,0) = (1,1)$ og begrund, at funktionen $K = G \circ H$ er defineret og differentiabel på en omegn U af $(0,0)$.

iv) Bestem Jacobimatricen for K i $(0,0)$.

Opgave 4 fortsættes på side 3

Opgave 5 (Vægt 25%)

Der er givet et maksimeringsproblem

maksimer $\quad \ln(4 - x^4 - x^2y - y^2 - z^2)$

under bibetingelserne

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; z \geq 0\,,\; y + z \geq 1\,.$$

i) Opskriv den tilhørende Lagrangefunktion og begrund at den er konkav som funktion af (x, y, z).

ii) Løs problemet.

Opgave 6 (Vægt 15%)

Der er givet et lineært standard maximeringsproblem (P)

maksimer $\quad 7x_1 + 9x_2 + 13x_3$

under bibetingelserne

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 3 \\ 2x_1 + \;\; x_2 + x_3 &\leq 1\,. \end{aligned}$$

i) Opskriv det tilhørende duale problem (P').

ii) Begrund, at både (P) og (P') må have optimale løsninger.

iii) Opskriv det til (P) hørende kanoniske problem.

iv) Løs både (P) og (P').