

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

Obligatorisk hjemmeopgave i matematik
24. november – 8. december 1998

Opgaven består af nedenstående 6 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige pointtal. Alle hjælpemidler er tilladte. Det er tilladt at samarbejde om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse.

I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Opgavebesvarelsen må ikke overstige 30 sider.

Besvarelsen underskrives af eksaminanden og afleveres i 2 eksemplarer inden tirsdag den 8. december 1998 kl. 12 i MØK-sekretariatet..

Det gælder for samtlige opgaver, at svarene skal begrundes.

Opgave 1 (Vægt 20%)

a) Man betragter talfølgen

$$x_n = (1 - a + e^{-an}) \cos(an),$$

hvor a er et givet tal i intervallet $[0, 2\pi]$. Find $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ og $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ i tilfældene hvor a er et af tallene

$$0, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi.$$

For hvilke af disse værdier af a er talfølgen konvergent?

b) Undersøg, for hvilke værdier af $b \geq 0$ og $c \geq 0$, følgende rækker er konvergente:

$$(1) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} n(n-1)b^n,$$

$$(2) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}, n > c} \left(\frac{1}{n-c} - \frac{1}{n+c} \right).$$

Find summen af (1) i tilfælde af konvergens. Find summen af (2) i tilfældet $c = 2$.

Opgave 2 (Vægt 10%)

a) Find samtlige løsninger til ligningen

$$z^4 = -16,$$

angivet på formen $a + ib$.

b) Vis, at et komplekst tal $z \neq 0$ har $|z| = 1$, hvis og kun hvis $\bar{z} = 1/z$.

Opgave 3 (Vægt 15%)

Man betragter funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

1° Vis, at f er kontinuert og differentiabel i ethvert punkt $x \in \mathbb{R}$, men at f ikke tilhører $C^1(\mathbb{R})$.

2° Undersøg, om der findes et interval $I = [-\delta, \delta]$ med $\delta > 0$, så at f afbilder I *enentydigt* på $f(I)$.

Opgave 4 (Vægt 15%)

Undersøg, hvilke af følgende mængder i $\mathbb{R}^2$ er kompakte:

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, 0 \leq x \leq \frac{1}{y+1} \},$$

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{y+1} \},$$

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < 3, 0 \leq x \leq \frac{1}{y+1} \}.$$

Skitsér de tre mængder.

Opgave 5 (Vægt 20%)

Man betragter det ikke-lineære maksimeringsproblem:

$$\begin{aligned} &\text{Maksimér } f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \\ &\text{under bibet. } x^2 + y^2 \leq 4, \\ &\qquad\qquad 2x + y \geq 1. \end{aligned}$$

Opgave 5 fortsættes på side 3

Problemet ønskes løst; herunder opskrives problemet på form som i Sydsæter II Afsnit 4.13, og der besvares følgende:

- 1° Find, hvilke punkter der opfylder Kuhn-Tucker's nødvendige betingelser.
- 2° Vis, at sådanne punkter tillige opfylder Kuhn-Tucker's tilstrækkelige betingelser.

Opgave 6 (Vægt 20%)

Man betragter maksimeringsprogrammet:

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \begin{array}{l} \text{Maksimér } x_1 - x_2 \\ \text{under bibet. } -3x_1 + x_2 \leq 2, \\ \phantom{\text{under bibet. }} x_1 - ax_2 \leq 1, \\ \text{med fortegnskravet } x_1 \geq 0. \end{array} \end{array}$$

Her er a er en given, positiv konstant.

- 1° Skitsér mængden M af tilladte løsninger til (P), for hvert $a > 0$.
- 2° Opskriv det duale program (P'), og skitsér mængden M' af tilladte løsninger til (P'), for hvert $a > 0$.
- 3° Angiv, for hver værdi af a , hvilket tilfælde af Hovedsætningens fire muligheder, der indtræffer. (Hovedsætningen er Sætning 6.1 i de udleverede noter af B. Fuglede om lineær optimering.)
- 4° Find samtlige løsninger til (P) og (P') med angivelse af optimale værdier, i de tilfælde hvor problemerne har løsning.